

# BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

# الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

➔ حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي

➔ حلول مفصلة لتمرين نموذجية

➔ حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية \* رياضيات \* تقني رياضي

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

3<sup>e</sup> Année Secondaire : Mathématiques

الجزء

1

## سلسلة هباج

# الرياضيات

## Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي  
و نماذج للبكالوريا

الجزء الأول

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي - رياضيات - علوم تجريبية

## سلسلة هباج

يسرني أن أقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الأعزاء في المرحلة الثانوية لكل الشعب العلمية منها و التكنولوجيا .

— محتوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

— يشمل هذا الجزء من السلسلة على خمسة محاور من البرنامج :

- الإستدلال بالتراجع
- النهايات و الإستمرارية
- القسمة في  $\mathbb{Z}$
- الجداء السلمي
- المستقيمات و المستويات في الفضاء

— يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

— كما حرصت أن أعالج في نهاية كل درس ، مجموعة تطبيقات للتصحيح الذاتي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

— كما حرصت أن أعالج في نهاية كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتضير لإمتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

أملا بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هباج جمال  
لصواني وهيب



## الإستدلال بالتراجع

مبدأ الإستدلال بالتراجع

لتكن  $P(n)$  خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي  $n$   
و ليكن  $n_0$  عدد طبيعي كفي .

لنبرهن على أن الخاصية  $P(n)$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n \geq n_0$  . يكفي أن نتبع الخطوات التالية :

- 1 - نتأكد من صحة الخاصية من أجل  $n = n_0$  أي  $P(n_0)$
- 2 - نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر تماماً من  $n_0$  ونبرهن صحة هذه الخاصية من أجل  $n + 1$  أي  $P(n + 1)$

مثال 1 -

لنثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن العدد  $4^n + 2$  مضاعف 3

الحل 1 -

لاحظ أن  $n_0 = 0$  لأن نريد إثبات الخاصية من أجل كل عدد طبيعي والخاصية المطلوبة هي : العدد  $4^n + 2$  مضاعف 3  
طريقة الحل :

نستعمل الاستدلال بالتراجع كما يلي :

- 1 - نتأكد أن الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$

هل العدد  $4^0 + 2$  مضاعف 3 ؟

لدينا  $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$  إذن : فعلاً العدد  $4^0 + 2$  مضاعف 3

و عليه الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$

- 2 - لنفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n > 0$

أي : العدد  $4^n + 2$  مضاعف 3 (فرضية التراجع)

لنبرهن أن العدد  $4^{n+1} + 2$  مضاعف 3

لدينا :  $4^{n+1} + 2 = 4 \times 4^n + 2$

$$= (1 + 3) \times 4^n + 2$$

$$= 4^n + 3 \times 4^n + 2$$

$$= (4^n + 2) + 3 \times 4^n$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد  $4^n + 2$  مضاعف 3 أي يوجد عدد طبيعي  $k$  يحقق  $4^n + 2 = 3k$

$$\text{منه : } 4^{n+1} + 2 = 3k + 3 \times 4^n$$

$$\text{أي : } 4^{n+1} + 2 = 3(k + 4^n)$$

نضع  $k + 4^n = \ell$  حيث  $\ell$  عدد طبيعي

$$\text{إذن : } 4^{n+1} + 2 = 3\ell$$

منه : العدد  $4^{n+1} + 2$  مضاعف 3

أي : الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  العدد  $4^n + 2$  مضاعف 3

مثال 2 -

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن العدد  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  مضاعف 7

الحل 2 -

باستعمال الاستدلال بالتراجع

- 1 - هل العدد  $3^{2(0)+1} + 2^{0+2}$  مضاعف 7 ؟

لدينا :  $3^{2(0)+1} + 2^{0+2} = 3 + 2^2 = 7$  و 7 مضاعف 7

إذن : العدد  $3^{2(0)+1} + 2^{0+2}$  مضاعف 7

- 2 - لنفرض أن العدد  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  مضاعف 7 من أجل  $n > 0$

هل العدد  $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$  مضاعف 7 ؟

$$\text{لدينا : } 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+2+1} + 2^{n+1+2}$$

$$= 3^2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$

$$\begin{aligned}
&= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} \\
&= (2+7) \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} \\
&= 2 \times 3^{2n+1} + 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} \\
&= 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} + 7 \times 3^{2n+1} \\
&= 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \times 3^{2n+1}
\end{aligned}$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  مضاعف 7

أي يوجد عدد طبيعي  $k$  حيث  $7k = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 2(7k) + 7 \times 3^{2n+1} \\
&= 7(2k + 3^{2n+1})
\end{aligned}$$

نضع :  $\ell = 2k + 3^{2n+1}$  حيث  $\ell$  عدد طبيعي .

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7\ell$$

إذن : العدد  $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$  مضاعف 7 .

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، العدد  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  مضاعف 7

ملاحظة : في بعض الحالات لا يثبت صحة خاصية نستعمل الاستدلال بالتراجع مرتين .

## تمارين الكتاب المدرسي

### التمرين 1 -

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا :

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

### الحل 1 -

1 - من أجل  $n=0$  المجموع  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$  يساوي 0 (نطبق على 0)

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0 \quad \text{و إذن : الخاصية محققة من أجل } n=0$$

$$2 - \text{نفرض أن : } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{من أجل } n > 0$$

$$\text{هل : } 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} ?$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{لدينا :}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{لأن حسب فرضية التراجع}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

منه : الخاصية محققة من أجل  $n+1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي } n$$

### التمرين 2 -

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## الحل - 2

1- من أجل  $n=0$  المجموع  $0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$  يساوي 0 (ينطبق على 0)

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0 \quad \text{و} \quad \text{لأن } n=0 \quad \text{إذن الخاصية محققة من أجل } n=0$$

2- نفرض أن :  $0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  من أجل  $n > 0$

$$\text{هل} \quad 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\text{لدينا :} \quad 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\text{لأن حسب فرضية التراجع :} \quad 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{منه :} \quad 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (n+1) \left[ \frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right]$$

$$= (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}$$

$$= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}$$

$$\text{لأن :} \quad (2n+3)(n+2) = 2n^2 + 7n + 6 \quad = (n+1) \frac{(2n+3)(n+2)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+2+1)(n+1+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## التمرين - 3

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

## الحل - 3

1- من أجل  $n=0$  المجموع  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$  يساوي 0 لأن  $n$  ينطبق على 0 .

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 0 \quad \text{و} \quad \text{إذن الخاصية محققة من أجل } n=0$$

2- نفرض أن :  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  من أجل  $n > 0$

$$\text{هل} \quad 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

$$\text{لدينا :} \quad 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$\text{لأن حسب فرضية التراجع} \quad 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\text{إذن :} \quad 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)(n+1)^2$$

$$= (n+1)^2 \left[ \frac{n^2}{4} + n + 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\
 &= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} \\
 &= \frac{(n+1)^2 (n+1+1)^2}{4}
 \end{aligned}$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

#### التمرين 4 -

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، العدد  $2^{3n} - 1$  مضاعف 7

#### الحل -

1 - من أجل  $n=0$  :  $2^{3(0)} - 1 = 1 - 1 = 0$  و 0 مضاعف 7

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n=0$

2 - نفرض أن العدد  $2^{3n} - 1$  مضاعف 7 من أجل  $n > 0$

هل  $2^{3(n+1)} - 1$  مضاعف 7 ؟

$$2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n+3} - 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$= 2^3 \times 2^{3n} - 1$$

$$= 8 \times 2^{3n} - 1$$

$$= (7+1) \times 2^{3n} - 1$$

$$= 7 \times 2^{3n} + 2^{3n} - 1$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد  $2^{3n} - 1$  مضاعف 7

أي يوجد عدد طبيعي  $k$  حيث  $2^{3n} - 1 = 7k$

$$2^{3(n+1)} - 1 = 7 \times 2^{3n} + 7k \quad \text{منه :}$$

$$= 7(2^{3n} + k)$$

$$\ell = 2^{3n} + k \quad \text{حيث } = 7\ell$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $2^{3n} - 1$  مضاعف 7

#### التمرين 5 -

أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $3^{2n} - 1$  مضاعف 8

#### الحل -

1 - من أجل  $n=0$  :  $3^{2(0)} - 1 = 1 - 1 = 0$  و 0 مضاعف 8

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n=0$

2 - نفرض أن  $3^{2n} - 1$  مضاعف 8 من أجل  $n > 0$

هل  $3^{2(n+1)} - 1$  مضاعف 8 ؟

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$= 3^2 \times 3^{2n} - 1$$

$$= 9 \times 3^{2n} - 1$$

$$= (8+1) \times 3^{2n} - 1$$

$$= 8 \times 3^{2n} + 3^{2n} - 1$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن  $3^{2n} - 1$  مضاعف 8

أي يوجد عدد طبيعي  $k$  حيث  $3^{2n} - 1 = 8k$

$$3^{2(n+1)} - 1 = 8 \times 3^{2n} + 8k \quad \text{منه :}$$

$$= 8(3^{2n} + k)$$

$$\ell = 3^{2n} + k \quad \text{حيث } = 8\ell$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $3^{2n} - 1$  مضاعف 8.

## التمرين - 6

هل الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$  مضاعف 7 صحيحة ؟

## الحل - 6

$$1 - \text{من أجل } n=0 : 3^{2(0)+1} - 2^{2(0)+2} = 3^1 - 2^2 = -1$$

لكن  $(-1)$  ليس مضاعف 7

إذن : الخاصية ليست صحيحة من أجل  $n=0$

نتيجة : الخاصية  $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$  مضاعف 7 من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ليست صحيحة .

## التمرين - 7

لتكن  $P(n)$  الخاصية :  $n^3 + 2n$  يقبل القسمة على 3 .

هل الخاصية  $P(n)$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؟

## الحل - 7

لنحاول أن نبرهن عن صحة هذه الخاصية باستعمال الاستدلال بالتراجع كما يلي :

$$1 - \text{من أجل } n=0 : 0^3 + 2(0) = 0 \text{ و } 0 \text{ يقبل القسمة على } 3$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$

$$2 - \text{نفرض أن : } n^3 + 2n \text{ يقبل القسمة على } 3 \text{ من أجل } n > 0$$

هل  $(n+1)^3 + 2(n+1)$  يقبل القسمة على 3 ؟

$$\text{لدينا : } (n+1)^3 + 2(n+1) = (n+1)[(n+1)^2 + 2]$$

$$= (n+1)(n^2 + 2n + 1 + 2)$$

$$= n^3 + 2n^2 + 3n + n^2 + 2n + 3$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 2n + 3$$

$$= n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)$$

لكن : حسب فرضية التراجع فإن  $n^3 + 2n$  يقبل القسمة على 3

أي : يوجد عدد طبيعي  $k$  يحقق  $n^3 + 2n = 3k$

$$\text{منه : } (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k + 3(n^2 + n + 1)$$

$$= 3(k + n^2 + n + 1)$$

$$= 3\ell \text{ حيث } \ell = k + n^2 + n + 1$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : الخاصية  $n^3 + 2n$  يقبل القسمة على 3 صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$

## التمرين - 8

$$1 - \text{أثبت أن إذا وجد عدد طبيعي } n \text{ حيث } 9 \text{ يقسم } 10^n + 1 \text{ فإن } 9 \text{ يقسم } 10^{n+1} + 1$$

$$2 - \text{هل من أجل كل عدد طبيعي } n : 10^n + 1 \text{ مضاعف } 9 ؟$$

## الحل - 8

$$1 - \text{ليكن } 10^n + 1 \text{ قابل للقسمة على } 9$$

أي : يوجد عدد طبيعي  $k$  حيث  $10^n + 1 = 9k$

$$\text{لدينا : } 10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1$$

$$= (9 + 1) \times 10^n + 1$$

$$= 9 \times 10^n + 10^n + 1$$

$$= 9 \times 10^n + 9k \text{ لأن } 10^n + 1 = 9k$$

$$= 9(10^n + k)$$

$$= 9\ell \text{ حيث } \ell = 10^n + k$$

إذن : العدد  $10^{n+1} + 1$  مضاعف 9

أي 9 يقسم العدد  $10^{n+1} + 1$

$$2 - \text{لاحظ أن : من أجل } n=0 \text{ فإن } 10^0 + 1 = 2 \text{ و لكن } 2 \text{ ليس مضاعف } 9$$

إذن : الخاصية ليست محققة من أجل  $n=0$

و عليه : العدد  $10^n + 1$  ليس مضاعف 9 من أجل كل عدد طبيعي  $n$  .

## التمرين - 9

لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ :  $u_0 = 4$  و  $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

$$1 - \text{أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \text{ فإن } u_n > 1$$



2 - أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن  $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

الحل - 9

1 - من أجل  $n = 1$  :  $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{4} = 2$

بما أن  $2 > 1$  فإن  $u_1 > 1$  إذن : الخاصية محققة من أجل  $n = 1$

نفرض أن  $u_n > 1$  من أجل  $n > 1$

هل  $u_{n+1} > 1$  ؟

لدينا :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

لكن :  $u_n > 1$  إذن حسب خواص الجذر فإن  $\sqrt{u_n} > \sqrt{1}$  أي  $\sqrt{u_n} > 1$

منه :  $u_{n+1} > 1$  أي الخاصية محققة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن  $u_n > 1$

2 - من أجل  $n = 1$  لدينا  $u_{n+1} = u_{1+1}$

$= u_2$

$= \sqrt{u_1}$

$= \sqrt{2}$

بما أن  $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$  فإن  $u_2 \leq \frac{3}{2}$  أي الخاصية صحيحة من أجل  $n = 1$

نفرض أن  $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$  من أجل  $n > 1$

هل  $u_{(n+1)+1} \leq \frac{3}{2}$  ؟

لدينا :  $u_{(n+1)+1} = \sqrt{u_{n+1}}$

لكن :  $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$  حسب فرضية التراجع .

إذن  $\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$

أي :  $u_{(n+1)+1} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$  [لاحظ أن  $\sqrt{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}$ ]

إذن  $u_{(n+1)+1} \leq \frac{3}{2}$

منه : الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن  $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

التمرين - 10

$(u_n)$  متتالية معرفة على  $N$  بـ  $u_0 = 3$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  ثابتة .

الحل - 10

تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة إذا و فقط إذا تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن  $u_n = u_0$

إذن : لنبرهن صحة الخاصية من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $u_n = u_0$

باستعمال الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 - من أجل  $n = 1$  لدينا :  $u_1 = \sqrt{6 + u_0}$

$= \sqrt{6 + 3}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

إذن :  $u_1 = 3 = u_0$  منه الخاصية محققة من أجل  $n = 1$

2 - نفرض أن  $u_n = u_0 = 3$  من أجل  $n > 1$

هل  $u_{n+1} = u_0 = 3$  ؟

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \quad \text{لدينا :}$$

لكن حسب فرضية التراجع  $u_n = u_0 = 3$

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{إذن :}$$

منه :  $u_{n+1} = u_0 = 3$  أي الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن  $u_n = u_0 = 3$

منه : المتتالية  $(u_n)$  ثابتة و كل حدودها تساوي 3

### التمرين 11

نضع  $t_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$

1- أحسب  $t_1$  ;  $t_2$  ;  $t_3$  ;  $t_4$

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

### الحل 11

$$t_1 = 1 \times 2 = 2 \quad -1$$

$$t_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$$

$$t_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 20$$

$$t_4 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 = 40$$

2 - الاستدلال بالتراجع :

$$\checkmark \text{ من أجل } n = 1 \text{ لدينا } \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) = \frac{1}{3} (2)(3) = 2 \text{ و } t_1 = 2$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n = 1$

$$\checkmark \text{ نفرض أن } t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \text{ من أجل } n > 1$$

$$\text{هل } t_{n+1} = \frac{1}{3} (n+1)(n+1+1)(n+1+2) \quad ?$$

$$\text{لدينا : } t_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) \\ = t_n + (n+1)(n+2)$$

$$t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \text{ حسب فرضية التراجع} = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$$

$$= (n+1)(n+2) \left( \frac{1}{3} n + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{3} (n+1)(n+1+1)(n+1+2)$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن  $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

### التمرين 12

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n \geq 2$  نضع :

$$S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + (n-1) \times 2^{n-2}$$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n \geq 2$  فإن :

$$S_n = (n-1) 2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left( \frac{1}{2} n - 1 \right) \times 2^n$$

### الحل 12

$$\text{لاحظ أن : } \left( \frac{1}{2} n - 1 \right) \times 2^n = \frac{1}{2} n \times 2^n - 2^n = n 2^{n-1} - 2^n$$

$$\text{و } (n-1) 2^n - n 2^{n-1} = n 2^n - 2^n - n 2^{n-1} = n 2^{n-1} (2-1) - 2^n = n 2^{n-1} - 2^n$$

$$\text{إذن : } (n-1) 2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left( \frac{1}{2} n - 1 \right) 2^n$$

منه : يكفي إثبات أن  $S_n = \left( \frac{1}{2} n - 1 \right) \times 2^n + 1$  بالتراجع كما يلي :

من أجل  $n = 2$  :  $S_1 = 1$

$$\text{و : } 1 + \left( \frac{1}{2} (2) - 1 \right) \times 2^2 = 1$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n = 2$

نفرض أن  $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n$  من أجل  $n > 2$

هل :  $S_{n+1} = 1 + \left(\frac{1}{2}(n+1) - 1\right) \times 2^{n+1}$  ؟

لدينا :  $S_{n+1} = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + (n-1) \times 2^{n-2} + n \times 2^{n-1}$   
 $= S_n + n \times 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{حسب فرضية التراجع .} \quad &= 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n + n \times 2^{n-1} \\ &= 1 + n \times 2^{n-1} - 2^n + n \times 2^{n-1} \\ &= 1 + 2n \times 2^{n-1} - 2^n \\ &= 1 + n \times 2^n - 2^n \end{aligned}$$

$$= 1 + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \times 2^{n+1}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}(n+1) - 1\right) \times 2^{n+1}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n \geq 2$  فإن  $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n$

### التمرين 13

الرمز  $n!$  يقرأ عاملي  $n$  حيث  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  من أجل  $n > 0$   
 $0! = 1$  من أجل  $n = 0$

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن :

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

### الحل 13

من أجل  $n=1$  لدينا :  $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n=1$

نفرض أن :  $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$

هل :  $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n(n!) + (n+1)(n+1)! = (n+1+1)! - 1$  ؟

لدينا :  $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n(n!) + (n+1)(n+1)! = [(n+1)! - 1] + (n+1)(n+1)!$

$$= (n+1)! (1 + n + 1) - 1$$

$$= (n+1)! (n+2) - 1$$

$$= (n+2)! - 1$$

$$= (n+1+1)! - 1$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

### التمرين 14

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $n! \geq 2^{n-1}$

### الحل 14

من أجل  $n=1$  لدينا  $1! = 1$

$$2^{1-1} = 2^0 = 1$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n=1$

نفرض أن  $n! \geq 2^{n-1}$  من أجل  $n > 1$

هل  $(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$  أي هل  $(n+1)! \geq 2^n$  ؟

لدينا (1) :  $n! \geq 2^{n-1}$  حسب فرضية التراجع .

و (2) :  $n+1 \geq 2$  لأن  $n > 1$

بضرب المتباينتين (1) و (2) طرف لطرف نحصل على

$$n! (n+1) \geq 2^{n-1} \times 2$$

$$(n+1)! \geq 2^n$$

منه الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $n! \geq 2^{n-1}$

**التمرين - 15 \* متباينة برنولي \***

a عدد حقيقي موجب تماما .

1- برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :  $(1+a)^n \geq 1+na$ 2- استنتج أن إذا كان  $q > 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ **الحل - 15**

1- الاستدلال بالتراجع :

من أجل  $n=1$  :  $(1+a)^1 = 1+a$ و  $1+na = 1+a$ إذن :  $(1+a)^n = 1+na$  أي الخاصية صحيحة من أجل  $n=1$ نفرض أن  $(1+a)^n \geq 1+na$  من أجل  $n > 1$ هل  $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$  ؟أي هل  $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a$  ؟لدينا حسب فرضية التراجع :  $(1+a)^n \geq 1+na$  ..... (1)نضرب طرفي هذه المتباينة في نفس العدد الحقيقي الموجب  $(1+a)$  فنحصل على :

$$(1+a)(1+a)^n \geq (1+na)(1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2$$

$$1+na+a+na^2 \geq 1+na+a \quad \text{لأن } na^2 > 0$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a$$

أي : الخاصية محققة من أجل  $n+1$ نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :  $(1+a)^n \geq 1+na$ 2 - إذا كان  $q > 1$  فإن يوجد عدد حقيقي موجب تماما a حيث  $q = 1+a$ 

$$q^n = (1+a)^n$$

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{لكن}$$

$$q^n \geq 1+na \quad \text{أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1+na = +\infty \quad \text{فإن } q^n \geq 1+na \quad \text{بما}$$

**التمرين - 16** $(u_n)$  متتالية معرفة بـ  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي n :  $u_{n+1} = 2u_n - 3$ 1 - أحسب  $u_5 ; u_4 ; u_3 ; u_2 ; u_1$ 2 - استنتج عبارة  $u_n - 3$  بدلالة n ثم برهن صحتها بالتراجع .3 - استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة n**الحل - 16**

$$u_1 = 2u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 - 3 = 2(1) - 3 = -1$$

$$u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$

$$u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$$

$$u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$$

2 - لاحظ أن :

$$3 - u_0 = 3 - 2 = 1 = 2^0$$

$$3 - u_1 = 3 - 1 = 2 = 2^1$$

$$3 - u_2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$$

$$3 - u_3 = 3 + 5 = 8 = 2^3$$

$$3 - u_4 = 3 + 13 = 16 = 2^4$$

$$3 - u_5 = 3 + 29 = 32 = 2^5$$

نستنتج أن  $3 - u_n = 2^n$ 

لنبرهن هذه الخاصية بالتراجع :

لدينا الخاصية محققة من أجل  $n=0$  و  $n=1$  و  $n=2$  و  $n=3$  و  $n=4$  و  $n=5$



نفرض أن  $3 - u_n \cdot 2^n$  من أجل  $n > 5$

هل  $3 - u_{n+1} = 2^{n+1}$  ؟

لدينا :  $3 - u_{n+1} = 3 - (2u_n - 3)$

$$= 6 - 2u_n$$

$$= 2(3 - u_n)$$

لأن  $3 - u_n = 2^n$  حسب فرضية التراجع

$$= 2 \times 2^n$$

$$= 2^{n+1}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $3 - u_n = 2^n$

3 - لدينا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $3 - u_n = 2^n$  إذن  $u_n = 3 - 2^n$

### التمرين 17

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  نضع :  $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

1 - أحسب  $S_1$  ;  $S_2$  ;  $S_3$  ;  $S_4$

2 - استنتج عبارة  $S_n$  بدلالة  $n$  ثم برهن عن صحتها بالتراجع .

3 - برهن عن صحة عبارة  $S_n$  السابقة باستعمال قانون مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية .

### الحل 17

1 - من أجل  $n = 1$  لدينا :  $2n - 1 = 2(1) - 1 = 1$

إذن :  $S_1 = 1^2$  لاحظ أن  $S_1 = 1$

من أجل  $n = 2$  لدينا :  $2n - 1 = 2(2) - 1 = 3$

إذن :  $S_2 = 2^2$  لاحظ أن  $S_2 = 1 + 3 = 4$

من أجل  $n = 3$  لدينا :  $2n - 1 = 2(3) - 1 = 5$

إذن :  $S_3 = 3^2$  لاحظ أن  $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

من أجل  $n = 4$  لدينا :  $2n - 1 = 2(4) - 1 = 7$

إذن :  $S_4 = 4^2$  لاحظ أن  $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

2 - نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $S_n = n^2$

لنبرهن صحة هذه الخاصية بالتراجع .

✓ الخاصية صحيحة من أجل  $n = 1$  ;  $n = 2$  ;  $n = 3$  ;  $n = 4$

✓ نفرض أن  $S_n = n^2$  من أجل  $n > 4$

هل  $S_{n+1} = (n+1)^2$  ؟

لدينا :  $S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1)$

$$= S_n + 2n + 1$$

لأن  $S_n = n^2$  حسب فرضية التراجع

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن  $S_n = n^2$

3 -  $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$

لاحظ أن  $S_n$  هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 2 لتكن  $(u_n)$  هذه المتتالية .

نضع :  $u_1 = 1$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن :  $u_n = 1 + 2(n - 1)$

أي :  $u_n = 2n - 1$

منه :  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \frac{(1 + 2n - 1) \times n}{2}$

أي :  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \frac{2n}{2} \times n = n^2$

أي :  $S_n = n^2$  و هو المطلوب .

### التمرين 18

$(u_n)$  متتالية معرفة بـ  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = u_n + 2$

$(v_n)$  متتالية معرفة بـ  $v_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = u_n + v_n$

1 - عبر عن  $u_n$  بدلالة  $n$ 2 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = 1 + n^2$ الحل - 181 - لدينا :  $u_{n+1} = u_n + 2$  إذن حسب التعريف ( $u_n$ ) متتالية حسابية أساسها 2 و حدها الأول  $u_0 = 1$  إذن :  $u_n = 1 + 2n$ 2 - لنبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = 1 + n^2$ ✓ من أجل  $n = 0$  :  $1 + n^2 = 1 + 0^2 = 1$  و  $v_0 = 1$  إذن الخاصية محققة من أجل  $n = 0$ ✓ نفرض أن  $v_n = 1 + n^2$  من أجل  $n > 0$ هل  $v_{n+1} = 1 + (n+1)^2$  ؟

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} u_n = 1 + 2n \\ v_n = 1 + n^2 \end{array} \right\} \text{ لأن } \begin{array}{l} v_{n+1} = u_n + v_n \\ = 1 + 2n + 1 + n^2 \\ = 1 + (n^2 + 2n + 1) \\ = 1 + (n+1)^2 \end{array}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$ نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $v_n = 1 + n^2$ التمرين - 19( $u_n$ ) متتالية معرفة بـ  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 2$ الحل - 19من أجل  $n = 0$  لدينا :  $0 \leq 1 \leq 2$  أي  $0 \leq u_0 \leq 2$ منه الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$ من أجل  $n = 1$  :  $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{3}$ بما أن  $0 \leq \sqrt{3} \leq 2$  فإن  $0 \leq u_1 \leq 2$ منه الخاصية صحيحة من أجل  $n = 1$ نفرض أن  $0 \leq u_n \leq 2$  من أجل  $n > 1$ هل  $0 \leq u_{n+1} \leq 2$  ؟لدينا  $0 \leq u_n \leq 2$  إذن :  $0 + 2 \leq u_n + 2 \leq 2 + 2$ أي :  $2 \leq u_n + 2 \leq 4$ أي :  $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4}$ أي :  $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ أي :  $0 < \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$  لأن  $0 < \sqrt{2}$ منه الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$ نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $0 \leq u_n \leq 2$ التمرين - 20 $p$  دالة كثير حدود معرفة على  $R$  بـ  $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$ 1 - تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $p(x+1) - p(x) = x^2$ 2 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $p(n) \in N$ 3 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ الحل - 201 - ليكن  $x \in R$ 

$$p(x+1) - p(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1) - \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x \right] \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$$

$$= x^2 \text{ و هو المطلوب}$$

لاحظ أن  $N \subset R$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $p(n+1) - p(n) = n^2$   
أي :  $p(n+1) = p(n) + n^2$

2 — لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي  $n : p(n) \in N$   
نبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كما يلي :

$$\checkmark \text{ من أجل } n=0 \text{ لدينا } p(0) = \frac{1}{3}(0) - \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{6}(0) = 0 \text{ و } 0 \in N$$

إذن : الخاصية محققة من أجل  $n=0$

$\checkmark$  نفرض أن  $p(n) \in N$  من أجل  $n > 0$

هل  $p(n+1) \in N$  ؟

لدينا حسب السؤال (1) :  $p(n+1) = p(n) + n^2$

و حسب فرضية التراجع :  $p(n) \in N$

إذن :  $(p(n) + n^2) \in N$

أي :  $p(n+1) \in N$

أي : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $p(n) \in N$

3 — لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $p(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

$$\checkmark \text{ من أجل } n=0 \text{ لدينا : } p(0+1) = p(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{6}(1)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2-3+1}{6} = 0$$

و الكتابة  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  من أجل  $n=0$  نكتب  $0^2 = 0$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$

$\checkmark$  نفرض أن :  $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  من أجل  $n > 0$

هل  $p(n+1+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$  ؟

لدينا حسب السؤال (1) :  $p(n+1) = p(n) + n^2$

إذن :  $p[(n+1)+1] = p(n+1) + (n+1)^2$

أي :  $p(n+1+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$

منه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $p(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

### التمرين 21

$(u_n)$  متتالية معرفة على  $N^*$  بـ  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1 — أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{n+1}$

2 — استنتج قيمة المجموع  $\frac{1}{1427 \times 1428} + \frac{1}{1428 \times 1429} + \dots + \frac{1}{2007 \times 2008}$

### الحل 21

1 — الاستدلال بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  فإن :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{n+1}$$

$\checkmark$  من أجل العنصرين  $u_1, u_2$  لدينا :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{12} \end{aligned}$$

في هذه الحالة  $n=2$  و  $\frac{n}{n+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

بما أن  $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$  فإن الخاصية محققة من أجل العنصرين  $u_1$  و  $u_2$

✓ نفرض أن  $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{n+1}$

هل  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

لدينا  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + u_{n+1}$  حسب فرضية التراجع .

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left( n + \frac{1}{(n+1)+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \left( \frac{n^2 + 2n + 1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

منه الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$   $= \frac{n+1}{n+1+1}$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{n+1}$

2 - لدينا من أجل  $n = 1426$  فإن :  $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \dots + \frac{1}{1426 \times 1427} = \frac{1426}{1426+1} = \frac{1426}{1427}$

و من أجل  $n = 2007$  فإن :  $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \dots + \frac{1}{1426 \times 1427} + \frac{1}{1427 \times 1428} + \dots + \frac{1}{2007 \times 2008} = \frac{2007}{2008}$

منه :  $\frac{1426}{1427} + \frac{1}{1427 \times 1428} + \dots + \frac{1}{2007 \times 2008} = \frac{2007}{2008}$

أي :  $\frac{1}{1427 \times 1428} + \frac{1}{1428 \times 1429} + \dots + \frac{1}{2007 \times 2008} = \frac{2007}{2008} - \frac{1426}{1427} = \frac{581}{2865416}$

**التمرين 22** :  $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$  و  $u_0 = 1$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 1$

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 1$

**الحل - 22**

نستعمل الاستدلال بالتراجع كما يلي :

$u_0 = 1$  إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$

✓ من أجل  $n = 1$  :  $u_1 = \frac{u_0 + 1}{u_0 + 3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{1}{2}$  و  $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$

إذن :  $0 \leq u_1 \leq 1$  منه الخاصية محققة من أجل  $n = 1$  .

✓ لنفرض أن  $0 \leq u_n \leq 1$  من أجل  $n > 1$

هل  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$  ؟

لدينا :  $0 \leq u_n \leq 1$  منه :  $1 \leq u_n + 1 \leq 2$  (نضيف 1 إلى الطرفين)

و من جهة أخرى :  $0 \leq u_n \leq 1$  منه :  $3 \leq u_n + 3 \leq 4$  (نضيف 3 إلى الطرفين)

أي :  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n + 3} \leq \frac{1}{3}$  (بتطبيق خاصية المقلوب)



$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} 1 \leq u_n + 1 \leq 2 \\ \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n + 3} \leq \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \text{إذن لدينا المتباينتين} \\
 & \frac{1}{4} \leq \frac{u_n + 1}{u_n + 3} \leq \frac{2}{3} \quad \text{بإجراء الجداء طرف لطرف نحصل على :} \\
 & \frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} \quad \text{أي :} \\
 & 0 \leq \frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} \leq 1 \quad \text{و خاصة :} \\
 & 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \quad \text{أي :} \\
 & \text{أي الخاصية محققة من أجل } n + 1 \\
 & \text{نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 \leq u_n \leq 1 .
 \end{aligned}$$

## النهايات و الإستمرارية

### 1 - النهاية المنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$ :

تعريف :  $f$  دالة عددية معرفة على مجال من الشكل  $[x_0 ; +\infty[$  و  $\ell$  عدد حقيقي القول أن نهاية  $f$  عند  $+\infty$  هي  $\ell$  يعني أن كل مجال مفتوح يشمل العدد  $\ell$  يشمل أيضا كل قيم  $f(x)$  من أجل  $x$  كبير بالقدر الكافي .  
و نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  ونقرأ : نهاية  $f(x)$  لما  $x$  يؤول إلى  $+\infty$  هي  $\ell$

ملاحظة :

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  نقول أن المستقيم نو المعادلة  $y = \ell$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$  عند  $+\infty$

$$\text{أمثلة : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

### 2 - النهاية غير المنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$ :

تعريف :  $f$  دالة معرفة على مجال من الشكل  $[x_0 ; +\infty[$   
القول أن نهاية  $f$  عند  $+\infty$  هي  $+\infty$  (على الترتيب هي  $-\infty$ ) يعني أن كل مجال من الشكل  $[A ; +\infty[$  (على الترتيب  $]-\infty ; A]$  حيث  $A \in \mathbb{R}$  يشمل كل قيم  $f(x)$  من أجل  $x$  كبير بالقدر الكافي و نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (على الترتيب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ )

و نقرأ نهاية  $f(x)$  لما  $x$  يؤول إلى  $+\infty$  هي  $+\infty$  (على الترتيب نهاية  $f(x)$  لما  $x$  يؤول إلى  $+\infty$  هي  $-\infty$ )

$$\text{أمثلة : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

### 3 - المستقيم المقارب المائل :

تعريف : ليكن  $(C_f)$  المنحنى البياني لدالة  $f$  في معلم . و ليكن  $(\Delta)$  المستقيم نو المعادلة  $y = ax + b$  . القول أن المستقيم

$$(\Delta) \text{ مقارب للمنحنى } (C_f) \text{ عند } +\infty \text{ (على الترتيب عند } -\infty) \text{ يعني أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ (على الترتيب } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0)$$

مثال :  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 3)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2x - 3 + \frac{1}{x^2} - (2x - 3) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x - 3$  هو مستقيم مقارب لمائل لمنحنى الدالة  $f$  عند  $+\infty$

$$\text{بنفس الطريقة لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x - 3$  هو مستقيم مقارب لمائل لمنحنى الدالة  $f$  عند  $-\infty$

### 4 - النهاية المنتهية لدالة عند عدد حقيقي :

تعريف :  $f$  دالة معرفة على مجال من الشكل  $]a ; x_0[ \cup ]x_0 ; b[$  و  $\ell \in \mathbb{R}$   
القول أن نهاية  $f$  عند  $x_0$  هي  $\ell$  يعني أن كل مجال مفتوح يشمل العدد  $\ell$  يشمل أيضا كل قيم  $f(x)$  من أجل  $x$  قريب بالقدر الكافي من  $x_0$  و نكتب  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  ونقرأ نهاية  $f(x)$  لما  $x$  يؤول إلى  $x_0$  هي  $\ell$

$$\text{مثال : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} x + 1$$

$$= 2$$

إذن عندما يقترب  $x$  من 1 بالقدر الكافي فإن العدد  $\frac{x^2-1}{x-1}$  يقترب بالقدر الكافي من 2

5- النهاية غير المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف :  $f$  دالة معرفة على مجال من الشكل  $]a; x_0[ \cup ]x_0; b[$ .

القول أن نهاية  $f$  عند  $x_0$  هي  $+\infty$  يعني أن كل مجال من الشكل  $[A; +\infty[$  حيث  $A \in \mathbb{R}$  يشمل كل قيم  $f(x)$  من أجل  $x$  قريب بالقدر الكافي من  $x_0$  و نكتب  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  و نقراً نهاية  $f(x)$  لما  $x$  يؤول إلى  $x_0$  هي  $+\infty$

مثال :  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0$

حذار ! في بعض الحالات يجب التمييز بين  $x$  يؤول إلى  $x_0$  بقيم أكبر من  $x_0$  أي  $x - x_0 > 0$  و  $x$  يؤول إلى  $x_0$  بقيم أصغر من  $x_0$  أي  $x - x_0 < 0$

مثال : لا يمكن حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$  لأن نميز حالتين :

✓ لما  $x \geq 0$  فإن  $\lim_{x \geq 0} 1/x = +\infty$  لأن  $1/x > 0$

✓ لما  $x \leq 0$  فإن  $\lim_{x \leq 0} 1/x = -\infty$  لأن  $1/x < 0$

ملاحظة : إذا كان  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  في معلم و كان  $(\Delta)$  مستقيماً معادلته  $x = a$  و كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  فإن المستقيم  $(\Delta)$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $a$ .

6- عمليات على النهايات : لتكن  $f$  و  $g$  دالتان عديتان .

$\alpha$  يمثل إما عدد حقيقي أو  $+\infty$  أو  $-\infty$  و  $\ell$  و  $\ell'$  أعداد حقيقية .  
نهاية مجموع الدالتين :

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء الدالتين :

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times g(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة الدالتين :

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\ell/\ell'$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة : الرمز ح ع ت يقرأ حالة عدم التعيين و معناه أنه لا يمكن إستنتاج قيم النهاية مباشرة لذلك نلجأ إلى إرالتها بطرق مختلفة بتطبيق خواص العمليات المعرفة على الأعداد الحقيقية كالعامل المشترك و الإختزال و الصرب في المرافق و تعريف العدد المشتق كما يلي :

الإختزال: نريد حساب  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0$

إذن : حسب جدول نهاية حاصل قسمة دالتين فإن  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  هي ح ع ت لإرالتها نلجأ إلى الإختزال

كمايلي :  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$

العامل المشترك : نريد حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$  إذن حسب جدول نهاية مجموع دالتين فإن

هي ح ع ت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x$

لإرالتها نلجأ إلى العامل المشترك كمايلي :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2/x = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

الضرب في المرافق : نريد حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

إذن حسب جدول نهاية مجموع دالتين فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$  هي ح ع ت  
 لإرالتها نلجأ إلى الضرب في المرافق كمايلي :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$

خاصية العدد المشتق: نريد حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

إذن: حسب جدول نهاية حاصل قسمة دالتين فإن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$  هي ح ع ت  
 لإرالتها نلجأ إلى إستخدام العدد المشتق كمايلي :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \cos x$

نعلم أن  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة  $f'$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f'(x) = -\sin x$



إذن  $f'(0) = -\sin 0 = 0$   
لكن حسب تعريف العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $0$  فإن :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - f(0)}{x}$$

$f(0) = 1$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - 1}{x} \right)$

نتيجة :  $f'(0) = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - 1}{x} \right) = f'(0) = 0$

7 - نهاية دالة كثير حدود عند  $+\infty$  أو  $-\infty$

لحساب نهاية دالة كثير حدود عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  - نأخذ نهاية الحد أعلى درجة فقط .

مثال :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x^2 - \sqrt{2}x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty$

حذار !  $\lim_{x \rightarrow a} (-x^3 + 2x^2 - \sqrt{2}x - 1) = -a^3 + 2a^2 - \sqrt{2}a - 1$  من أجل  $a \in \mathbb{R}$

8 - نهاية دالة ناطقة عند  $+\infty$  أو  $-\infty$

لحساب نهاية دالة ناطقة عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  - نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام .

مثال :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

نشاط :

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-2}$

1 - عين مجموعة تعريف الدالة  $f$  .

2 - أحسب نهايات الدالة  $f$  على حدود مجموعة تعريفها .

الحل :

1 - تكون  $f$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $x^2 + x - 2 \neq 0$

لنحل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-2) = 9$  إذن :  $\begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$

نتيجة : مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي :  $]-\infty; -2[ \cup ]-2; 1[ \cup ]1; +\infty[$

2 - النهايات :

(نهاية دالة ناطقة عند  $-\infty$ )  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+3}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(-2)+3}{x^2+x-2}$

لاحظ أن :

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$x^2+x-2$	$+$	$0$	$-$	$+$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2+x-1) = 0^-$  و  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2+x-1) = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x-1) = 0^+$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x-1) = 0^-$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-1}{y} = -\infty$

منه :

ملاحظة : نقبل أن  $0^+$  يعني أن العدد يقترب من صفر بقيم موجبة و  $0^-$  يعني أن العدد يقترب من صفر بقيم سالبة .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2(-2)+3}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1}{y} = +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2(1)+3}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5}{y} = -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2(1)+3}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5}{y} = +\infty \\
 \text{(نهاية دالة ناطقة عند } +\infty) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0
 \end{aligned}$$

9 - نهاية دالة مركبة

مبرهنة :

c ; b ; a تمثل إما أعداد حقيقية أو  $(+\infty)$  أو  $(-\infty)$ f ; v ; u دوال عددية حيث  $f = v \circ u$  (o يرمز إلى مركب دالتين)إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$  وكانت  $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ مثال :  $v : x \mapsto \sin x$  ،  $u : x \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ 

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} v(x) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2}$$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(u(x)) = 1 \quad \text{أي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v \circ u(x) = 1 \quad \text{نتيجة :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{أي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{أي}$$

10 - حساب النهاية بالمقارنة :

مبرهنة (1)

f ; g ; h دوال عددية معرفة على مجال من الشكل  $]A ; +\infty[$  ،  $\ell$  عدد حقيقي .إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$  وإذا كان من أجل كل x كبير بالقدر الكافي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{فإن} \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

مثال : لنكن f دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ نعلم أن من أجل كل x من  $\mathbb{R}$  فإن  $-1 \leq \cos x \leq 1$ 

$$\text{إذن : من أجل } x > 0 \quad \text{فإن} \quad -1/x \leq \frac{\cos x}{x} \leq 1/x$$

أي : من أجل  $x \in ]0 ; +\infty[$  فإن  $-1/x \leq f(x) \leq 1/x$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1/x = 0 \quad \text{لكن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{إذن :}$$

مبرهنة (2)

f ; g دالتان معرفتان على مجال من الشكل  $]A ; +\infty[$  .إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  و من أجل كل x كبير بالقدر الكافي  $f(x) \geq g(x)$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 

مبرهنة (3)

f ; g دالتان معرفتان على مجال من الشكل  $]A ; +\infty[$  .إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  و من أجل كل x كبير بالقدر الكافي  $f(x) \leq g(x)$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة : يمكن استعمال المبرهنات (1) ، (2) و (3) إذا كانت النهايات عند  $-\infty$  أو عند عدد حقيقي .  
تعريف الإستمرارية

$f$  دالة معرفة على مجموعة  $D_f$  و  $a$  عدد حقيقي غير معزول من  $D_f$   
القول أن الدالة  $f$  مستمرة عند  $a$  يعني أن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ملاحظة : إذا كانت  $f$  دالة مستمرة عند كل عنصر من المجال  $I$  نقول أن  $f$  مستمرة على  $I$   
هندسيا : تكون دالة  $f$  مستمرة على مجال  $I$  إذا كان من الممكن رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليدين) أي لا يوجد إنقطاع لهذا المنحنى على المجال  $I$  .  
نتائج :

✓ الدالة  $\cos$  و الدالة  $\sin$  مستمرة على  $\mathbb{R}$

✓ الدوال كثيرات الحدود مستمرة على  $\mathbb{R}$

✓ الدوال الناطقة مستمرة على مجموعات تعريفها .

نشاط :

$f$  دالة معرفة على المجال  $[-2 ; 3]$  كمايلي : إذا كان  $x \in [-2 ; 0[$   $f(x) = -x^2 + 2$  إذا كان  $x \in [0 ; 3]$   $f(x) = x$   
1 - هل تقبل الدالة  $f$  نهاية عند  $0$  ؟

2 - هل الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[-2 ; 3]$  ؟

3 - أعط مجالا جزئيا من المجال  $[-2 ; 3]$  تكون فيه الدالة  $f$  مستمرة .

الحل :

1 - لاحظ أن الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[-2 ; 0[$  بـ  $f(x) = -x^2 + 2$  إذن يمكن حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  كما يلي :  
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 + 2 = -(0)^2 + 2 = 2$

لاحظ أيضا أن الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0 ; 3]$  بـ  $f(x) = x$  إذن يمكن حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  كما يلي :  
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

من جهة أخرى الدالة  $f$  معرفة عند  $0$  لأن  $0 \in [0 ; 3]$  و  $0 \notin [-2 ; 0[$  إذن  $f(0) = 0$   
خلاصة :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  إذن : الدالة  $f$  لا تقبل نهاية محددة عند  $0$  و عليه فالدالة  $f$  ليست مستمرة عند  $0$  .

2 - العدد  $0$  عنصر من المجال  $[-2 ; 3]$  و الدالة  $f$  ليست مستمرة عند  $0$  إذن فهي ليست مستمرة على المجال  $[-2 ; 3]$

3 - الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[-1 ; -1/2]$  بـ  $f(x) = -x^2 + 2$  إذن هي كثير حدود منه  $f$  مستمرة على المجال  $[-1 ; -1/2]$  .

مبرهنة القيم المتوسطة

نص المبرهنة :

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $[a ; b]$

من أجل كل عدد حقيقي  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  محصور بين  $a$  و  $b$  بحيث  $f(c) = k$

حالة خاصة : إذا كان  $f(a) \times f(b) < 0$  فإن العدد  $k = 0$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$

إذن : يوجد  $c$  من المجال  $[a ; b]$  حيث  $f(c) = 0$  أي المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل حلا و هو  $c$  على المجال  $[a ; b]$  .

المعادلة  $f(x) = k$

إذا كانت  $f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $[a ; b]$  فإنه من أجل كل عدد حقيقي  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  فالمعادلة  $f(x) = k$  تقبل على الأقل حلا  $c$  حيث  $c \in [a ; b]$  .

مثال :  $f(x) = x^3 + x - 1$

$f$  دالة كثير حدود إذن مستمرة على  $\mathbb{R}$  و خاصة فهي مستمرة على  $[0 ; 1]$

لدينا :  $f(0) = -1$  و  $f(1) = 1$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي  $k$  من المجال  $[-1 ; 1]$  فإن المعادلة  $f(x) = k$  تقبل على الأقل حلا  $c$  حيث

$c \in [0 ; 1]$

و خاصة  $k = 0$  حيث  $0 \in [-1 ; 1]$  إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا على الأقل  $c$  من المجال  $[0 ; 1]$

نشاط :

برهن أن المعادلة  $x^3 - 2x = -2$  تقبل على الأقل حلا في المجال  $[-2; 1]$ 

الحل :

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $[-2; 1]$  بـ  $f(x) = x^3 - 2x$ ✓  $f$  دالة كثير حدود إذن  $f$  مستمرة على  $[-2; 1]$ 

✓  $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) = -8 + 4 = -4$

✓  $f(1) = 1 - 2 = -1$

نتيجة :  $f$  تحقق شروط مبرهنة القيم المتوسطة على المجال  $[-2; 1]$  أي من أجل كل عدد حقيقي  $k$  من المجال  $[-4; -1]$ فإن المعادلة  $f(x) = k$  تقبل على الأقل حلا  $c$  في المجال  $[-2; 1]$ بما أن  $k = -2$  هو عنصر من المجال  $[-4; -1]$  فإن المعادلة  $f(x) = -2$  أي المعادلة  $x^3 - 2x = -2$  تقبلعلى الأقل حلا  $c$  من المجال  $[-2; 1]$ الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال  $[a; b]$ مبرهنة : إذا كانت  $f$  دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال  $[a; b]$  فإن من أجل كل عدد حقيقي  $k$  محصور بين  $f(a)$  و $f(b)$  فإن المعادلة  $f(x) = k$  تقبل حلا وحيدا  $c$  في المجال  $[a; b]$ .

إيجاد حصر لحل معادلة بالتصنيف :

الهدف من هذا العنصر هو البحث عن حل معادلة من الشكل  $f(x) = 0$  على مجال  $[a; b]$  حيث  $f$  دالة مستمرة على المجال $[a; b]$  لذلك نلجأ إلى استعمال مبرهنة القيم المتوسطة كما يلي :إذا تحقق أن  $f$  رتيبة تماما و مستمرة على  $[a; b]$  حيث  $f(a) \times f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  فيالمجال  $[a; b]$  إذن لدينا حصرا أولا للعدد  $\alpha$  حيث  $a < \alpha < b$  و يبحث عن حصر آخر يكون أصغر من المجال $[a; b]$  وذلك بأخذ  $m_1$  منتصف المجال  $[a; b]$  أي  $m_1 = \frac{a+b}{2}$ نقوم بحساب  $f(m_1)$  ثم نلجأ إلى النتيجة التالية :إذا كان  $f(m_1) \times f(a) < 0$  فإن  $a < \alpha < m_1$  إذن المجال الثاني للحصر هو  $[a; m_1]$ إذا كان  $f(m_1) \times f(b) < 0$  فإن  $m_1 < \alpha < b$  إذن المجال الثاني للحصر هو  $[m_1; b]$ نعيد نفس الخطوات على المجال الثاني لنحصل على المجال الثالث و هكذا حتى نحصل على أصغر مجال يشمل العدد  $\alpha$ .مثال : نريد تعيين حصرا لحل المعادلة  $x^2 - x - 1 = 0$  على المجال  $]-1; 0[$ نعتبر الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[-1; 0]$  بـ  $f(x) = x^2 - x - 1$ لدينا  $f'(x) = 2x - 1$ 

$x$	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$

إذن :  $f$  متناقصة تماما على  $]-\infty; 1/2[$  و خاصة على المجال  $[-1; 0]$ نتيجة :  $f$  متناقصة تماما و مستمرة على المجال  $[-1; 0]$  و  $f(0) = -1$  و  $f(-1) = 1$ إذن  $f(-1) \times f(0) < 0$  منه المعادلة  $f(x) = 0$  أي  $x^2 - x - 1 = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-1 < \alpha < 0$ الخطوة الأولى : ليكن  $m_1$  منتصف  $[-1; 0]$  أي  $m_1 = -1/2$ 

لدينا  $f(m_1) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$

إذن :  $f(m_1) \times f(-1) < 0$ منه : الحصر الجديد  $-1 < \alpha < -1/2$ الخطوة الثانية : ليكن  $m_2$  منتصف  $[-1; -1/2]$  أي  $m_2 = -3/4$ 

$$f(m_2) = f(-\frac{3}{4}) = \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{9+12-16}{16} = \frac{5}{16}$$

لدينا :  $f(-3/4) \times f(-1/2) < 0$ إذن : الحصر الجديد  $-3/4 < \alpha < -1/2$ الخطوة الثالثة : ليكن  $m_3$  منتصف  $[-3/4; -1/2]$  أي  $m_3 = -5/8$



$$f(m_3) = f\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{64} + \frac{5}{8} - 1 = \frac{25 + 40 - 64}{64} = \frac{1}{64}$$

لدينا:  $f(-5/8) \times f(-1/2) < 0$

إذن: الحصر الجديد  $-5/8 < \alpha < -1/2$

يمكن مواصلة الحصر بهذه الطريقة حتى نحصل على أصغر مجال ممكن و ذلك بالقيام بأكبر عدد من الخطوات .

## تمارين الكتاب المدرسي

### التمرين 1

$f$  دالة معرفة على  $] -1 ; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

- 1 - أوجد عدد حقيقيا  $A$  حيث إذا كان  $x > A$  فإن  $f(x) \in ]2,9 ; 3,1[$
- 2 - بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 3$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .
- 3 - أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $\Delta$ .

### الحل 1

1 - لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

- إذن: من أجل  $x$  كبير بالقدر الكافي فإن  $f(x) \in ]2,9 ; 3,1[$
- وعليه يمكن أخذ العدد  $A$  أكبر ما يمكن حيث إذا كان  $x > A$  فإن  $f(x) \in ]2,9 ; 3,1[$
- 2 - بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  فإن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 3$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$
- 3 - الوضعية:

$$f(x) - (3) = \frac{3x-2}{x+1} - 3 = \frac{3x-2-3x-3}{x+1} = \frac{-5}{x+1}$$

لندرس إشارة  $f(x) - (3)$  على  $\mathbb{R}$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$-5$		-	-
$x+1$		-	+
$\frac{-5}{x+1}$		+	-

نتيجة: لما  $x \in ]-1 ; +\infty[$  لدينا  $f(x) - 3 < 0$  إذن:  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$

لما  $x \in ]-\infty ; -1[$  لدينا  $f(x) - 3 > 0$  إذن:  $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$

### التمرين 2

$f$  دالة معرفة على  $] -1 ; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

- 1 - أوجد عدد حقيقيا  $A$  حيث إذا كان  $x < A$  فإن  $f(x) \in ]0,9 ; 1,1[$
- 2 - بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .
- 3 - أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $\Delta$ .

### الحل 2

1 - لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$

- إذن: من أجل  $x$  صغير بالقدر الكافي فإن  $f(x) \in ]0,9 ; 1,1[$
- و عليه يمكن أخذ العدد  $A$  أصغر ما يمكن حيث إذا كان  $x < A$  فإن  $f(x) \in ]0,9 ; 1,1[$
- 2 - بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  إذن: المستقيم  $\Delta$  ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$

3- الوضعية :

$$f(x) - 1 = \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-x-1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
2	+		+
x-1	-		+
$\frac{2}{x-1}$	-		+

لندرس إشارة  $f(x) - 1$  على  $\mathbb{R}$  :نتيجة : لما  $x \in ]-\infty; 1[$  لدينا  $f(x) - 1 < 0$  إذن : تحت  $C_f$   $\Delta$ لما  $x \in ]1; +\infty[$  لدينا  $f(x) - 1 > 0$  إذن : فوق  $C_f$   $\Delta$ 

التمرين - 3

f دالة معرفة على  $]1; +\infty[$   $\rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x-1}$  وليكن  $C_f$  تمثيلها البياني1- بين أن المستقيم  $\Delta$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب للمنحنى  $C_f$  عند  $+\infty$ .2- أدرس وضعية المنحنى  $C_f$  بالنسبة للمستقيم  $\Delta$ .

الحل - 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x-1} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \end{aligned}$$

0 = إذن : المستقيم  $\Delta$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب للمنحنى  $C_f$  عند  $+\infty$ 

$$f(x) - x = x + \frac{1}{x-1} - x = \frac{1}{x-1} \quad -2$$

	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-		+
$\frac{1}{x-1}$	-		+

لندرس إشارة  $f(x) - x$  كما يلي :نتيجة : لما  $x \in ]-\infty; 1[$  لدينا  $f(x) - x < 0$  إذن : تحت  $C_f$   $\Delta$ لما  $x \in ]1; +\infty[$  لدينا  $f(x) - x > 0$  إذن : فوق  $C_f$   $\Delta$ 

التمرين - 4

f دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$  وليكن  $C_f$  تمثيلها البياني في معلم1- بين أن المستقيم  $\Delta$  ذو المعادلة  $y = 2x - 1$  مقارب للمنحنى  $C_f$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$ .2- أدرس وضعية المنحنى  $C_f$  بالنسبة للمستقيم  $\Delta$ .

الحل - 4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 - \frac{2}{x^2 + 1} - (2x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^2 + 1} = 0 \end{aligned} \quad -1$$

0 = إذن : المستقيم  $\Delta$  ذو المعادلة  $y = 2x - 1$  مقارب لمنحنىالدالة f عند  $+\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x^2 + 1} = 0$$

إذن : المستقيم  $\Delta$  ذو المعادلة  $y = 2x - 1$  مقارب لمنحنى الدالة f عند  $-\infty$ 

$$f(x) - (2x - 1) = \left(2x - 1 - \frac{2}{x^2 + 1}\right) - (2x - 1) = \frac{-2}{x^2 + 1} \quad -2 \text{ الوضعية :}$$

$$f(x) - (2x - 1) < 0 \text{ أي } \frac{-2}{x^2 + 1} < 0 \text{ فإن } x^2 + 1 > 0 \text{ بما أن}$$

إذن : المنحنى  $C_f$  يقع تحت المستقيم  $\Delta$ .

#### التمرين 5

في كل حالة من الحالات التالية أوجد معادلة للمستقيم المقارب لمنحنى الدالة  $f_0$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$

$$f_5(x) = x + 3 - \frac{2}{|x|} \quad -5 \quad f_1(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad -1$$

$$f_6(x) = \frac{\sin x}{x} - x + 1 \quad -6 \quad f_2(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} \quad -2$$

$$f_7(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x} \quad -7 \quad f_3(x) = 2x + 1 + \frac{5}{x - 3} \quad -3$$

$$f_8(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \quad -8 \quad f_4(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2 - 1} \quad -4$$

#### الحل 5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) - 1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \end{aligned} \quad -1$$

= 0 إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مقارب لمنحنى

عند  $+\infty$  و  $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) - \left(-\frac{1}{3}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} - \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2} \end{aligned} \quad -2$$

= 0 إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = -1/3$  مقارب لمنحنى

عند  $+\infty$  و  $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_3(x) - (2x + 1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 1 + \frac{5}{x - 3} - (2x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x - 3} \end{aligned} \quad -3$$

= 0 إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مقارب لمنحنى

عند  $+\infty$  و  $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_4(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2 - 1} - \left(-\frac{1}{2}x\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} \end{aligned} \quad -4$$

= 0 إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = -\frac{1}{2}x$  مقارب لمنحنى

عند  $+\infty$  و  $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_5(x) - (x + 3) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x + 3 - \frac{2}{|x|} - (x + 3) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{|x|} \end{aligned} \quad -5$$

= 0 إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 3$  مقارب لمنحنى

عند  $+\infty$  و  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_6(x) - (-x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} - x + 1 - (-x + 1) \quad - 6$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

لكن :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

منه :  $\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{-1}{x}$  أو  $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$  (حسب إشارة x)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \text{بما أن} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} -1/x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0 \quad \text{فإن بالحصر}$$

نتيجة :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_6(x) - (-x + 1) = 0$  إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 1$  مقارب لمنحنى الدالة  $f_6$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$

$$f_7(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x} \quad - 7 \quad \text{لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :}$$

$$\begin{array}{r|rr} x^2 + x - 1 & 1 & 2x \\ -x^2 - \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x & \frac{3}{4} \\ \hline 0 + \frac{3}{2}x - 1 & & \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4} & & \\ \hline 0 - \frac{1}{4} & & \end{array}$$

$$x^2 + x - 1 = (1 - 2x)\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4} \quad \text{نتيجة :}$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x} = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1/4}{1 - 2x} \quad \text{منه :}$$

$$f_7(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1/4}{1 - 2x} \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_7(x) - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1/4}{1 - 2x} \quad \text{إذن :}$$

$$f_7 \text{ منه المستقيم ذو المعادلة } y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \quad \text{مقارب لمنحنى الدالة } f_7 \text{ عند } +\infty \text{ و عند } -\infty$$

$$f_8(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \quad - 8 \quad \text{لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :}$$

$$\begin{array}{r|rr} x^3 + 1 & x^2 - 1 \\ x^3 - x & x \\ \hline x + 1 & \end{array}$$

$$x^3 + 1 = (x^2 - 1)(x) + (x + 1) \quad \text{نتيجة :}$$

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1} \quad \text{إذن :}$$

$$f_8(x) = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1} \quad \text{منه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_8(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x^2 - 1} \quad \text{أي :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2}$$

$$f_8 \text{ منه المستقيم ذو المعادلة } y = x \quad \text{مقارب لمنحنى الدالة } f_8 \text{ عند } +\infty \text{ و عند } -\infty$$

#### التمرين 6 -

f دالة معرفة على IR بـ  $f(x) = 2x + 3$

1 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ثم استنتج مجالا لقيم x حتى يكون f(x) ينتمي إلى [6,99 ; 7,01]

2 -  $\alpha$  عدد حقيقي حيث  $0 < \alpha < 1$ . في أي مجال يجب اختيار x بحيث يكون f(x) ينتمي إلى المجال  $[\alpha - 7 ; \alpha + 7]$  ؟

#### الحل - 6

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 2(2) + 3 = 7 \quad - 1 \quad \text{لأن f كثير حدود مستمر على IR}$$

$$6,99 < f(x) < 7,01 \quad \text{يكافئ} \quad 6,99 < 2x + 3 < 7,01$$

$$3,99 < 2x < 4,01 \quad \text{يكافئ}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_6(x) - (-x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} - x + 1 - (-x + 1) \quad - 6$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

لكن :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

منه :  $\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{-1}{x}$  أو  $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$  (حسب إشارة x)

بما أن  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$  فإن بالحصر  $\lim_{x \rightarrow \infty} -1/x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$

نتيجة :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_6(x) - (-x + 1) = 0$  إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 1$  مقارب لمنحنى الدالة  $f_6$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$

$$f_7(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x} \quad - 7$$

لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$x^2 + x - 1$	$1 - 2x$
$-x^2 - \frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{2}x \quad \frac{3}{4}$
$0 + \frac{3}{2}x - 1$	
$-\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$	
$0 - \frac{1}{4}$	

نتيجة :  $x^2 + x - 1 = (1 - 2x)\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}$

منه :  $\frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x} = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1/4}{1 - 2x}$

أي :  $f_7(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1/4}{1 - 2x}$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_7(x) - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1/4}{1 - 2x}$

$= 0$  منه المستقيم ذو المعادلة  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$  مقارب لمنحنى الدالة  $f_7$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$

$$f_8(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \quad - 8$$

لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$x^3 + 1$	$x^2 - 1$
$x^3 - x$	$x$
$x + 1$	

نتيجة :  $x^3 + 1 = (x^2 - 1)(x) + (x + 1)$

إذن :  $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

منه :  $f_8(x) = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

أي :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_8(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2}$$

$= 0$  منه المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  مقارب لمنحنى الدالة  $f_8$  عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$

### التمرين 6

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 2x + 3$

1 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ثم إستنتج مجالا لقيم  $x$  حتى يكون  $f(x)$  ينتمي إلى  $[6,99 ; 7,01]$

2 -  $\alpha$  عدد حقيقي حيث  $0 < \alpha < 1$ . في أي مجال يجب إختيار  $x$  بحيث يكون  $f(x)$  ينتمي إلى المجال  $[\alpha - 7 ; \alpha + 7]$  ؟

### الحل - 6

1 -  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 2(2) + 3 = 7$

$6,99 < f(x) < 7,01$  يكافئ  $6,99 < 2x + 3 < 7,01$

$3,99 < 2x < 4,01$  يكافئ

$$1,995 < x < 2,005 \quad \text{يكافئ}$$

$$x \in ]1,995 ; 2,005[ \quad \text{يكافئ}$$

$$f(x) = 2 \quad \text{ينتمي إلى المجال } ]7 - \alpha ; 7 + \alpha[ \text{ هذا يعني أن } 7 - \alpha < f(x) < 7 + \alpha$$

$$7 - \alpha < 2x + 3 < 7 + \alpha \quad \text{أي :}$$

$$7 - \alpha - 3 < 2x + 3 - 3 < 7 + \alpha - 3 \quad \text{أي :}$$

$$4 - \alpha < 2x < 4 + \alpha \quad \text{أي :}$$

$$\frac{4 - \alpha}{2} < x < \frac{4 + \alpha}{2} \quad \text{أي :}$$

$$\text{منه : } x \in \left] \frac{4 - \alpha}{2} ; \frac{4 + \alpha}{2} \right[ \text{ و هو المجال المطلوب .}$$

### التمرين 7

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2} \rightarrow \text{IR} \quad \text{دالة معرفة على}$$

$$1 - \text{أحسب } \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$2 - \text{أوجد مجالا } I \text{ يشمل 4 بحيث إذا كان } x \in I \text{ فإن } f(x) \in ]2,99 ; 3,10[$$

### الحل 7

$$1 - \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{4+2}{4-2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{(f معرفة عند 4)}$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3 \quad \text{إذن : } x \text{ يقترب بالقدر الكافي من 4 كما يلي :}$$

$$2,99 < f(x) < 3,10 \quad \text{يكافئ} \quad 2,99 < \frac{x+2}{x-2} < 3,10$$

$$\text{يكافئ} \quad 2,99(x-2) < x+2 < (x-2)3,10 \quad \text{لأن } x-2 > 0$$

$$2,99x - 5,98 < x+2 < 3,10x - 6,20 \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x+2 < 3,10x - 6,20 \\ x+2 > 2,99x - 5,98 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} 8,20 < 2,10x \\ 7,98 > 1,99x \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x > \frac{8,20}{2,10} \\ x < \frac{7,98}{1,99} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x > 3,904 \\ x < 4,01 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\text{يكافئ} \quad x \in ]3,904 ; 4,01[ \text{ و هو المجال المطلوب .}$$

### التمرين 8

$$1 - \text{أدرس النهايات عند } +\infty, -\infty \text{ و عند 1 للدالة } f \text{ المعرفة بـ } f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$$

$$2 - \text{حدد المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة } f$$

### الحل 8

$$1 - f \text{ معرفة على المجال } ]-\infty ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2 \quad \text{(نهاية دالة ناطقة عند } -\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(1)+5}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{7}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(1)+5}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{7}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} - 2$$

2 -  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$  عند  $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$  عند  $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$  على يسار 1

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$  على يمين 1

### التمرين 9

فيما يلي عين مجموعة تعريف كل دالة ثم أدرس النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :

$$h(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2} \quad -3 \quad f(x) = \frac{2x^2+5}{x-2} \quad -1$$

$$t(x) = \frac{x+1}{(x-1)(4-x)} \quad -4 \quad g(x) = \frac{-4x+1}{3-x} \quad -2$$

### الحل 9

1 -  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(2)^2+5}{x-2} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{13}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(2)^2+5}{x-2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{13}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

2 -  $g$  معرفة على المجال  $]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{-x} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-4(3)+1}{3-x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-11}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-4(3)+1}{3-x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-11}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{-x} = 4$$

3 -  $h$  معرفة على المجال  $]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2+1}{(x-2)^2} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{3}{y^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2+1}{(x-2)^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{3}{y^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

4 -  $\ell$  معرفة على المجال  $]-\infty; 1[ \cup ]1; 4[ \cup ]4; +\infty[$  :  
ميز بين الحالات التالية :

$x$	$-\infty$	$1$	$4$	$+\infty$
$(x-1)(4-x)$	$-$	$0$	$+$	$-$

لما  $x < 1$  فإن  $(x-1)(4-x) \leq 0$

لما  $x > 1$  فإن  $(x-1)(4-x) \geq 0$

لما  $x < 4$  فإن  $(x-1)(4-x) \geq 0$

لما  $x > 4$  فإن  $(x-1)(4-x) \leq 0$

منه النتائج التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{5}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{4+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{5}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x^2+5x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{-x^2+5x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = 0$$

#### التمرين 10

نفس أسئلة التمرين 9 بالنسبة للدوال المعرفة كما يلي :

$$h(x) = (1-x)(2-\sqrt{-x}) - 3 \quad f(x) = \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{x} - 1$$

$$\ell(x) = \frac{2}{x} - \cos x - 4 \quad g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2} - 2$$

#### الحل 10

$f - 1$  معرفة من أجل :  $\left. \begin{array}{l} x-1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$

منه :  $D_f = [0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

$$\text{لأن لما } x < 1 \text{ فإن } x-1 < 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} + 2 = -\infty$$

$$\text{لأن لما } x > 1 \text{ فإن } x-1 > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{1} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$$

$g - 2$  معرفة من أجل :  $\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{array} \right\}$  أي :  $\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{array} \right\}$

منه :  $D_g = [0; 4[ \cup ]4; +\infty[$

$$\text{لأن لما } x < 4 \text{ فإن } (\sqrt{x}-2) < 0 \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4+1}{\sqrt{x}-2} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{5}{y} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4+1}{\sqrt{x}-2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5}{y} = +\infty$$

لأن لما  $x \rightarrow 4$  فإن  $(\sqrt{x}-2) \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(1 - \frac{2}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{x}}} = +\infty$$

لأن لما  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$

3- معرفة من أجل :  $-x \geq 0$  أي :  $x \leq 0$   
منه :  $D_h = ]-\infty; 0]$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2-\sqrt{-x} = -\infty \end{array} \right\} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)(2-\sqrt{-x}) = -\infty$$

4- معرفة من أجل :  $x \neq 0$  إذن :  $D_\ell = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} - \cos x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\cos x \text{ (غير معرفة)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} - \cos(0) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} - \cos(0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \cos x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\cos x \text{ (غير معرفة)}$$

### التمرين 11

نفس أسئلة التمرين 9 بالنسبة للدوال المعرفة كما يلي :

$$h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \quad -3 \quad f(x) = \sin 2x + x \quad -1$$

$$\ell(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x \quad -4 \quad g(x) = \sqrt{x-1} - 2x \quad -2$$

### الحل 11

1- f معرفة على  $]-\infty; +\infty[$  لأنها مجموع دالتين معرفتين على IR .

$$-1 \leq \sin 2x \leq +1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

2- g معرفة من أجل  $x \geq 0$  إذن  $D_g = [0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$$

3- h معرفة من أجل :  $\left. \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{array} \right\}$  أي :  $x \geq 1$

منه :  $D_h = [1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1 - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = +\infty \text{ لأن } = 0$$

4- معرفة من أجل  $x^2 - x + 1 \geq 0$  كما يلي :  
 لندرس إشارة كثير الحدود  $x^2 - x + 1$  :  
 $\Delta = 1 - 4 < 0$  إذن :  
 $D_\ell = ]-\infty; +\infty[$  فإن  $x^2 - x + 1 > 0$  إذن :  
 منه : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $x^2 - x + 1 > 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{array} \right\} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ell(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ لأن } = \frac{-1}{1+1} = -1/2$$

## التمرين 12 -

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = 3$$

$$\lim_{x \geq 3} \sqrt{\frac{3x+4}{x-3}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + x - 3} = -4$$

$$\lim_{x \geq 1} \sqrt{\frac{3-6x}{1-x}} = -2$$

## الحل 12 -

$$(x-3) \geq 0 \text{ فإن } x \geq 3 \text{ لأن } \lim_{x \geq 3} \sqrt{\frac{3x+4}{x-3}} = \lim_{x \geq 3} \sqrt{\frac{3(3)+4}{x-3}} = \lim_{y \geq 0} \sqrt{\frac{13}{y}} = +\infty - 1$$

$$(1-x) \leq 0 \text{ فإن } x \geq 1 \text{ لأن } \lim_{x \geq 1} \sqrt{\frac{3-6x}{1-x}} = \lim_{x \geq 1} \sqrt{\frac{3-6(1)}{1-x}} = \lim_{y \leq 0} \sqrt{\frac{-3}{y}} = +\infty - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + x - 3 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + x - 3} = +\infty - 4$$

## التمرين - 13

$f$  دالة معرفة بـ  $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$

عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$  ثم أحسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف :

## الحل - 13

X	$-\infty$	-2		2	$+\infty$	
$4-x^2$		-	0	+	0	-

$4-x^2 > 0$  معرفة من أجل  $f$

إذن :  $D_f = ]-2; 2[$

$$4-x^2 \geq 0 \text{ فإن } x \geq -2 \text{ لأن لما } x \geq -2 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-3}{\sqrt{y}} = -\infty$$

$$4-x^2 \geq 0 \text{ فإن } x \leq 2 \text{ لأن لما } x \leq 2 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-3}{\sqrt{y}} = -\infty$$

## التمرين - 14

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{(x+1)^2} \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right) \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \sin x}{x} \quad -4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 1}{2x}\right) \quad -2$$

## الحل - 14

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{x^2-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x}{x^2}\right) \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 1}{2x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{2x}\right) \quad -2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\pi/2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x - 1\right) + \frac{1}{(x+1)^2} \quad -3$$

$$(x+1)^2 \geq 0 \text{ فإن } x \rightarrow -1 \text{ لأن لما } x \rightarrow -1 \text{ فإن } = \lim_{y \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{y}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} = +\infty \text{ و } \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ لأن } = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \sin x}{x} = ? \quad -4$$

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \sin x$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $f'(x) = \cos x$  منه  $f'(0) = \cos(0) = 1$

و حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن :  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ إذن :}$$

$$\text{منه : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \sin x}{x} = \pi \text{ و هو المطلوب}$$

**التمرين - 15**

برهن أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x > -1$  فإن :  $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$

استنتج نهاية الدالة  $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$  عند  $+\infty$

**الحل - 15**

لدينا :  $x > -1$  إذن :  $x+1 > 0$  أي  $\frac{1}{x+1} > 0$

من جهة أخرى لدينا :  $-1 \leq \cos x \leq 1$  إذن : بضرب أطراف هذه المتباينة في نفس العدد الموجب  $\frac{1}{x+1}$  نحصل على :

$$-1 \times \frac{1}{x+1} \leq \cos x \times \frac{1}{x+1} \leq 1 \times \frac{1}{x+1}$$

$$\text{أي } \frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1} \text{ و هو المطلوب .}$$

نتيجة : بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$  فإن حسب نظرية الحصر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0 \text{ و هو المطلوب .}$$

**التمرين - 16**

$f$  دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x > 1$  فإن  $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$  هل  $f$  تقبل نهاية عند  $+\infty$  ؟

**الحل - 16**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+7}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3 \text{ لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x}{x} + \frac{\cos x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{\cos x}{x} \right) = 3$$

نتيجة :

$$\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+7}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = 3 \text{ بما أن}$$

فإن حسب مبرهنة الحصر  $f$  تقبل نهاية عند  $+\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

**التمرين - 17**

$f$  دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x \geq 0$  :  $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$  هل تقبل الدالة  $f$  نهاية عند  $+\infty$  ؟

**الحل - 17**

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \geq 0 : |f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\text{أي : } \frac{-1}{x^2 + 1} \leq f(x) - 3 \leq \frac{1}{x^2 + 1} \text{ لأن } \frac{1}{x^2 + 1} > 0$$

$$\text{منه : } 3 - \frac{1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\text{بما أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 3$$

فإن حسب مبرهنة الحصر الدالة  $f$  تقبل نهاية عند  $+\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

**التمرين - 18**

$f$  دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x > 0$  :  $f(x) \leq -2x^3$  هل تقبل الدالة  $f$  نهاية عند  $+\infty$  ؟

**الحل - 18**

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty \text{ و } f(x) \leq -2x^3 \text{ من أجل } x > 0$$

فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  (حسب مبرهنة الدرس)

### التمرين 19

$f$  دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x > 0$  :  $f(x) \geq \frac{1}{4}x^4 + x$   
هل تقبل الدالة  $f$  نهاية عند  $+\infty$  ؟

### الحل 19

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x^4 + x = +\infty$  و  $f(x) \geq \frac{1}{4}x^4 + x$  من أجل  $x > 0$

فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (حسب مبرهنة الدرس)

### التمرين 20

1 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون  $1 \leq 3 + 2 \cos x \leq 5$

2 - هل الدالة  $f : x \mapsto \frac{x-1}{3+2 \cos x}$  تقبل نهاية عند  $+\infty$  ؟

### الحل 20

1 - من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $-1 \leq \cos x \leq 1$

منه :  $-2 \leq 2 \cos x \leq 2$

منه :  $3-2 \leq 3+2 \cos x \leq 3+2$

منه :  $1 \leq 3+2 \cos x \leq 5$  وهو المطلوب

2 - حسب السؤال الأول فإن :  $1 \leq 3+2 \cos x \leq 5$

منه :  $1/5 \leq \frac{1}{3+2 \cos x} \leq 1/1$  ..... (1)

نضع  $\alpha = \frac{1}{3+2 \cos x}$  إذن :  $1/5 \leq \alpha \leq 1$  أي  $\alpha > 0$

منه : الدالة  $f$  معرفة بـ  $f(x) = \alpha(x-1)$

أي  $f(x) = \alpha x - \alpha$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha x = +\infty$  لأن  $\alpha > 0$

### التمرين 21

1 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $x^2 - 3 \sin x \geq x^2 - 3$

2 - هل تقبل الدالة  $f : x \mapsto x^2 - 3 \sin x$  نهاية عند  $+\infty$  ؟

### الحل 21

1 - من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا :  $\sin x \leq 1$

منه :  $-3 \sin x \geq -3$

منه :  $x^2 - 3 \sin x \geq x^2 - 3$  وهو المطلوب

2 - بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 = +\infty$  و  $f(x) \geq x^2 - 3$  من أجل  $x > 0$  فإن

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (حسب مبرهنة الدرس)

### التمرين 22

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^2 + 2x \sin x$

هل تقبل الدالة  $f$  نهاية عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$  ؟

### الحل 22

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x \sin x$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x + 2 \sin x)$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 \sin x = +\infty \end{array} \right\} \text{ لأن } = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x \sin x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + 2 \sin x)\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} x &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \sin x &= -\infty\end{aligned}\right\} \text{ لأن } = +\infty$$

لاحظ أن  $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$  إذن يمكن وضع  $\alpha = 2 \sin x$  حيث  $-2 < \alpha < 2$

$$\left. \begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 \sin x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \alpha = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \sin x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \alpha = -\infty\end{aligned}\right\} \text{ منه :}$$

### التمرين 23

$f$  دالة عددية معرفة على المجال  $] -1/2 ; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{x + \sin x}{2x + 1}$

- 1- بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x > -1/2$  :  $\frac{x-1}{2x+1} < f(x) < \frac{x+1}{2x+1}$
- 2- هل الدالة  $f$  تقبل نهاية عند  $+\infty$  ؟

### الحل 23

$$1 - 1/2 < x < -1/2 \text{ إذن : } 2x > -1 \text{ أي } 2x + 1 > 0 \text{ منه } \frac{1}{2x+1} > 0 \text{ ..... (1)}$$

من جهة أخرى : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن  $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\text{إذن : } x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1 \text{ ..... (2)}$$

بضرب أطراف المتباينة (2) في العدد الموجب  $\frac{1}{2x+1}$  نحصل على :

$$\text{من أجل } x > -1/2 \text{ و هو المطلوب . } \frac{x-1}{2x+1} \leq \frac{x + \sin x}{2x+1} \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

$$\text{أي } \frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

$$2 - \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

فإن حسب مبرهنة الحصر :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1/2$

### التمرين 24

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[-2; 4[$  بـ  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \in [-2; 1[ \\ x - 1 & : x \in [1; 4[ \end{cases}$

- 1- هل تقبل الدالة  $f$  نهاية عند 1 ؟
- 2- هل الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[-2; 4[$  ؟ علل .
- 3- أذكر مجالا  $I$  تكون الدالة  $f$  مستمرة عليه .

### الحل 24

$$1 - \text{ لما } x \in [-2; 1[ \text{ فإن } f(x) = x^2 + x \text{ إذن : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x = 1^2 + 1 = 2$$

$$\text{لما } x \in [1; +\infty[ \text{ فإن } f(x) = x - 1 \text{ إذن : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ منه الدالة } f \text{ لا تقبل نهاية عند 1}$$

2- الدالة  $f$  ليست مستمرة على المجال  $[-2; 4[$  لأن يوجد عنصر و هو 1 من المجال  $[-2; 4[$  حيث الدالة  $f$  ليست مستمرة عند 1 (الدالة لا تقبل نهاية عند 1)

3- على المجال  $[2; 3]$  الدالة  $f$  معرفة بـ  $f(x) = x - 1$  و هي دالة كثير حدود . إذن : فهي مستمرة على  $\mathbb{R}$  و خاصة على  $[2; 3]$  و هو المجال المطلوب (مثلا) .

التمرين 25

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & : x \leq 2 \\ x^2 + x - 5 & : x > 2 \end{cases}$$

1 - أدرس إستمرارية الدالة  $f$  عند 2 .

2 - هل الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  ؟ علل .

الحل 25

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x + 1 \quad : \text{إذن } f(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ فإن } x \in ]-\infty; 2] \\ = (2)^2 - 2(2) + 1 \\ = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + x - 5 \quad : \text{إذن } f(x) = x^2 + x - 5 \text{ فإن } x \in ]2; +\infty[ \\ = (2)^2 + 2 - 5 \\ = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

من جهة أخرى لدينا الدالة  $f$  معرفة عند 2 بالعلاقة  $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$f(2) = (2)^2 - 2(2) + 1 = 1 \quad \text{منه :}$$

نتيجة :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 1$  إذن : الدالة  $f$  مستمرة عند 2

2 - الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  لأنها مستمرة عند 2 و مستمرة على كل من المجالين  $]2; +\infty[$  و  $]-\infty; 2]$  لأنها عبارة عن دالة كثير حدود معرفة على كل من المجالين على حدا .

التمرين 26

أدرس إستمرارية الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & : x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + 1 & : x > 1 \end{cases}$$
الحل 26

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + x + 2 = -1 + 1 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

نتيجة :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  إذن :  $f$  ليست مستمرة عند 1

إذن : فهي ليست مستمرة على  $\mathbb{R}$  .

و لكن  $f$  مستمرة على  $]1; +\infty[$  و على المجال  $]-\infty; 1]$  كل على حدا .

التمرين 27

$f$  دالة عددية معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} & : x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

1 - أدرس إستمرارية  $f$  عند 1 .

2 - هل الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  ؟

الحل 27

1 - من أجل  $x \in ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  فإن  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$  بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 1 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & \\ x^2 - 1 & \\ \underline{x^2 - x} & \\ x - 1 & \\ \underline{x - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

من أجل  $x \in ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  فإن  $f(x) = x^2 + x + 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

نتيجة : بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$  فإن  $f$  مستمرة عند 1

2- بما أن  $f$  دالة ناطقة على المجال  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  فهي مستمرة على هذا المجال ولكن  $f$  مستمرة أيضا عند 1 إذن  $f$  مستمرة عند كل عنصر من  $\mathbb{R}$  أي  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

### التمرين 28

أدرس إستمرارية الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  بـ  $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

### الحل 28

$f$  دالة ناطقة إذن معرفة و مستمرة على مجال تعريفها أي  $f$  مستمرة على المجال  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

### التمرين 29

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = (x^2 - x) \sin x$  لماذا الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

### الحل 29

لنعرف الدالتين  $u$  و  $v$  كما يلي :  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ،  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sin x$  ،  $x \mapsto x^2 - x$

الدالة  $u$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$

الدالة  $v$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$

إذن جداء الدالتين  $u$  و  $v$  هو دالة مستمرة على  $\mathbb{R}$  أي :

الدالة المعرفة بـ  $x \mapsto (x^2 - x) \sin x$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$  و منه  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

### التمرين 30

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$  . أدرس إستمرارية  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

### الحل 30

لدينا  $f$  هو جداء الدالتين المستمرتين على  $\mathbb{R}$  والمعرفتين بـ :  $x \mapsto \cos x$  و  $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$  إذن :  $f$  هي دالة مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

### التمرين 31

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[-2; 1]$  كما يلي :  $f(x) = x(x + E(x))$

حيث الدالة  $E(x) = x$  هي الدالة جزء الصحيح للعدد  $x$ .

1- عين عبارة  $f(x)$  على كل من المجالات التالية :  $[-2; -1]$  ،  $[-1; 0]$  ،  $[0; 1]$

2- هل الدالة  $f$  مستمرة على  $[-2; -1]$  ،  $[-2; 0]$  ،  $[-2; 1]$

### الحل 31

1- نعلم أن الدالة جزء صحيح معرفة كما يلي :  $E(x) = \begin{cases} -2 & : x \in [-2; -1[ \\ -1 & : x \in [-1; 0[ \\ 0 & : x \in [0; 1] \end{cases}$

إذن الدالة  $f$  معرفة كما يلي :  $f(x) = \begin{cases} x(x-2) & : x \in [-2; -1[ \\ x(x-1) & : x \in [-1; 0[ \\ x(x+0) & : x \in [0; 1] \end{cases}$

أي  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & : x \in [-2; -1[ \\ x^2 - x & : x \in [-1; 0[ \\ x^2 & : x \in [0; 1] \end{cases}$



2 — الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[-2; -1]$  بـ  $f(x) = x^2 - 2x$  إذن هي دالة كثير حدود  
منه :  $f$  مستمرة على  $[-2; -1]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & : x \in [-2; -1] \\ x^2 - x & : x \in [-1; 0] \end{cases} \text{ كمايلي : المجال } [-2; 0]$$

إذن :  $f$  مستمرة على  $[-2; -1]$  و  $f$  مستمرة على  $[-1; 0]$

لكن هل  $f$  مستمرة عند  $-1$  ؟

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 2x = (-1)^2 - 2(-1) = 3 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - x = (-1)^2 - (-1) = 2$$

إذن : الدالة  $f$  لا تقبل نهاية عند  $-1$  إذن  $f$  ليست مستمرة عند  $-1$ .

نتيجة :  $f$  ليست مستمرة على  $[-2; 0]$  لأن  $f$  ليست مستمرة عند  $-1$ .

بما أن الدالة  $f$  ليست مستمرة عند  $-1$  و  $-1$  عنصر من المجال  $[-2; 1]$  فإن  $f$  ليست مستمرة على المجال  $[-2; 1]$ .

### التمرين 32

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة برهن أن المعادلة  $x^3 - 4x = -2$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $[-3; -2]$

### الحل 32

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[-3; -2]$  بـ  $f(x) = x^3 - 4x$

$$\text{لدينا : } f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) = 0 \text{ و } f(-3) = (-3)^3 - 4(-3) = -15$$

بما أن  $f$  مستمرة على المجال  $[-3; -2]$  فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = k$  تقبل على الأقل حلا على

المجال  $[-3; -2]$  من أجل كل عدد حقيقي  $k$  حيث  $k \in [f(-3); f(-2)]$  أي  $k \in [-15; 0]$

بما أن  $k = -2$  عنصر من المجال  $[-15; 0]$  فإن المعادلة  $f(x) = -2$  تقبل على الأقل حلا على المجال  $[-3; -2]$

أي المعادلة  $x^3 - 4x = -2$  تقبل على الأقل حلا على المجال  $[-3; -2]$  و هو المطلوب

### التمرين 33

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : 0 \leq x < 1 \\ -2x + 3 & : 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على المجال } [0; 2] \text{ بـ}$$

1 — هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلول في المجال  $[0; 2]$  ؟

2 — تحقق أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال  $[0; 2]$

### الحل 33

1 —  $f$  معرفة على المجال  $[0; 1]$  بـ  $f(x) = 2x + 1$  (كثير حدود) إذن هي مستمرة على  $[0; 1]$

$f$  معرفة على المجال  $[1; 2]$  بـ  $f(x) = -2x + 3$  (كثير حدود) إذن هي مستمرة على  $[1; 2]$

لكن هل  $f$  مستمرة عند  $1$  ؟

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -2x + 3 = -2(1) + 3 = 1$$

إذن : الدالة  $f$  لا تقبل نهاية عند  $1$  منه  $f$  ليست مستمرة عند  $1$

نتيجة :  $f$  ليست مستمرة عند  $1$  و  $1$  عنصر من المجال  $[0; 2]$  إذن  $f$  ليست مستمرة على المجال  $[0; 2]$ .

إذن :  $f$  لا تحقق شرط تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال  $[0; 2]$  و عليه لا يمكن تطبيق هذه المبرهنة

2 — حل المعادلة  $f(x) = 0$

$$\text{لدينا : } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 & : x \in [0; 1] \\ \text{أو} \\ -2x + 3 = 0 & : x \in [1; 2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 & [0; 1] \text{ ينتمي إلى} \\ \text{أو} \\ x = 3/2 & 3/2 \in [1; 2] \end{cases} \text{ مرفوض لأن ينتمي إلى } [0; 1] \text{ مقبول لأن } 3/2 \in [1; 2]$$

نتيجة : المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا هو  $3/2$  على المجال  $[0; 2]$

## التمرين 34

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 3x^3 - 2x - \frac{1}{4}$

1 - أحسب  $f(-1)$  ؛  $f(-1/2)$  ؛  $f(0)$  ؛  $f(1)$

2 - استنتج أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال  $[-1 ; 1]$

## الحل 34

1 -

$$f(1) = 3(1) - 2(1) - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$f(0) = 0 - 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = 3(-\frac{1}{2})^3 - 2(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{-3 + 8 - 2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 2(-1) - \frac{1}{4} = -3 + 2 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

2 - الدالة  $f$  كثير حدود إذن هي مستمرة على  $\mathbb{R}$  وخاصة فهي مستمرة على كل من المجالات

$[-1 ; -1/2]$  ؛  $[-1/2 ; 0]$  ؛  $[0 ; 1]$  كل على حدا .

و من جهة أخرى :

$$f(-1) \times f(-1/2) < 0$$

$$f(-1/2) \times f(0) < 0$$

$$f(0) \times f(1) < 0$$

إذن : المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل حلا في كل مجال من المجالات  $[-1 ; -1/2]$  ؛  $[-1/2 ; 0]$  و  $[0 ; 1]$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة و عليه فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل ثلاث حلول على المجال  $[-1 ; 1]$

## التمرين 35

$f$  دالة معرفة على المجال  $[-3 ; 6]$  بـ :  $f(x) = x^3 - 12x$

1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها .

2 - ماهو عدد حلول المعادلة  $f(x) = 30$

## الحل 35

1 - معرفة و قابلة للاشتقاق على  $[-3 ; 6]$  و  $f'(x) = 3x^2 - 12$

إشارة  $f'(x)$  :  $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$

x	-3	-2	2	6	
$3(x^2 - 4)$	+	0	-	0	+

منه : جدول إشارة  $f'(x)$  على المجال  $[-3 ; 6]$  كما يلي :

x	-3	-2	2	6	
f'(x)	+	0	-	0	+

إذن جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $[-3 ; 6]$  :

x	-3	-2	2	6	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	9	16	-16	30	144

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = -27 + 36 = 9$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 = 16$$

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) = 8 - 24 = -16$$

$$f(6) = (6)^3 - 12(6) = 36(6 - 2) = 36 \times 4 = 144$$

2 - حسب جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[-3 ; 6]$  فإن الدالة  $f$  تأخذ القيمة 30 من أجل عدد حقيقي وحيد  $k$  حيث

$2 < k < 6$  لأن من أجل  $x \in [2 ; 6]$  فإن  $f(x) \in [-16 ; 144]$  و العدد 30 عنصر من المجال  $[-16 ; 144]$

منه المعادلة  $f(x) = 30$  تقبل حلا وحيدا .

## التمرين 36

بين أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرا حقيقيا

## الحل 36

لتكن  $f$  دالة كثير حدود حيث  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  حيث  $a_n \neq 0$  حيث  $a_0; a_1; \dots; a_{n-1}; a_n$  معاملات حقيقية و  $n$  عدد طبيعي فردي حيث

نعلم أن  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  لأنها دالة كثير حدود .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

إذن نميز حالتين كما يلي :

	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
$a_n > 0$	$-\infty$	$+\infty$
$a_n < 0$	$+\infty$	$-\infty$

نتيجة :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0 \text{ فإن } a_n < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0 \text{ فإن } a_n > 0$$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $a_n$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$  و  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل حلا حقيقيا . و هو المطلوب

## التمرين 37

$f$  دالة مستمرة على المجال  $]-3; +\infty[$  و جدول تغيراتها كما يلي :

$x$	-3	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		4	
		-2		2

بين أن المنحنى  $C_f$  الممثل للدالة  $f$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما

## الحل 37

$f$  مستمرة على  $]-3; +\infty[$  إذن  $f$  مستمرة على  $]-3; 0]$  و مستمرة أيضا على  $[0; 2]$

من جهة أخرى و حسب جدول التغيرات لدينا :

$$f(x) \in [-2; +\infty[ \text{ فإن } x \in ]-3; 0]$$

$$f(x) \in [-2; 4[ \text{ فإن } x \in [0; 2]$$

$$0 \in [-2; 4[ \text{ و } 0 \in [-2; +\infty[$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد  $x_0 \in ]-3; 0]$  يحقق  $f(x_0) = 0$  و يوجد  $x_1 \in [0; 2]$  يحقق  $f(x_1) = 0$   
 - النقطة ذات الإحداثيات  $A(x_0; 0)$  و  $B(x_1; 0)$  تنتمي إلى المنحنى  $C_f$  و ترتيبها معدوم إذن فهي تنتمي إلى محور الفواصل.  
 -  $C_f$  يقطع محور الفواصل في نقطتين متميزتين  $A$  و  $B$  فواصلهما على الترتيب  $-3 \leq x_0 \leq 0$  و  $0 \leq x_1 \leq 2$

## التمرين 38

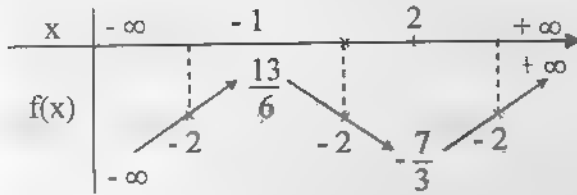
نجد جدول تغيرات دالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$		$\frac{13}{6}$		$+\infty$
	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$	

برر لماذا المعادلة  $f(x) + 2 = 0$  تقبل ثلاثة حلول على الأقل في IR

الحل - 38

المعادلة  $f(x) + 2 = 0$  تكافئ  $f(x) = -2$  و حسب جدول تغيرات الدالة  $f$  على IR لدينا :



لما  $f(x) \in ]-\infty ; 13/6]$  فإن  $x \in ]-\infty ; -1]$

لما  $f(x) \in [-7/3 ; 13/6]$  فإن  $x \in [-1 ; 2]$

لما  $f(x) \in [-7/3 ; +\infty[$  فإن  $x \in [2 ; +\infty[$

بما أن  $f$  مستمرة على IR و العدد -2 هو عنصر من المجالات  $]-\infty ; 13/6]$  ؛  $[-7/3 ; 13/6]$  و  $[-7/3 ; +\infty[$  فإن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = -2$  تقبل حلا على الأقل في كل مجال من المجالات  $]-\infty ; -1]$

$[-1 ; 2]$  ؛  $[2 ; +\infty[$  أي المعادلة  $f(x) = -2$  تقبل على الأقل ثلاثة حلول في IR منه المعادلة  $f(x) + 2 = 0$  تقبل على

الأقل ثلاثة حلول في IR

التمرين - 39

$f$  دالة معرفة على المجال  $[-1 ; 2]$  بـ  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1 - أحسب  $f'(x)$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

2 - بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا في  $[1 ; 2]$

الحل - 39

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) \quad -1$$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $[-1 ; 2]$

x	-1	0	1	2
f'(x)	+	0	-	+
f(x)	-6	-1	-2	3

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 = -2 - 3 - 1 = -6$$

$$f(0) = -1$$

$$f(1) = 2(1) - 3(1) - 1 = -2$$

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 1 = 16 - 12 - 1 = 3$$

2 - من جدول تغيرات الدالة  $f$  نستنتج أنه لما  $x \in [1 ; 2]$  فإن  $f(x) \in [-2 ; 3]$

بما أن العدد 0 عنصر من المجال  $[-2 ; 3]$  و  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[1 ; 2]$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1 < \alpha < 2$

التمرين - 40

$f$  دالة معرفة على المجال  $[0 ; \pi]$  بـ  $f(x) = \cos^3 x - 3 \cos x + 2$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $[0 ; \pi]$  حيث  $f(\alpha) = \sqrt{2}$

الحل - 40

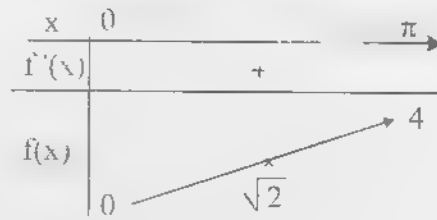
لندرس تغيرات الدالة  $f$  على  $[0 ; \pi]$

$f$  قابلة للإشتقاق على  $[0 ; \pi]$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(-\sin x)(\cos^2 x) - 3(-\sin x) \\ &= -3 \sin x (\cos^2 x - 1) \\ &= -3 \sin x (-\sin^2 x) \\ &= 3 \sin x \times \sin^2 x \end{aligned}$$

إذن : إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $\sin x$  أي موجب تماما لأن  $\sin x$  موجب على المجال  $]0 ; \pi[$

جدول تغيرات الدالة f :



$$f(0) = \cos^3(0) - 3 \cos(0) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$f(\pi) = \cos^3(\pi) - 3 \cos(\pi) + 2 = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 5 = 4$$

بجدة :  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على  $[0; \pi]$   
 لما  $x \in [0; \pi]$  فإن  $f(x) \in [0; 4]$   
 العدد  $\sqrt{2}$  عنصر من المجال  $[0; 4]$

اذا المعادلة  $f(x) - \sqrt{2} = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]0; \pi[$  أي يوجد  $\alpha \in ]0; \pi[$  حيث  $f(\alpha) = \sqrt{2}$

تمرين - 41

f دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

1 - أدرس تغيرات الدالة f .

2 - بين ان المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا على كل من المجالات  $[-1; 0]$  ،  $[0; 1]$  ،  $[2; 3]$

حل - 41

f - معرفة وقابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  .

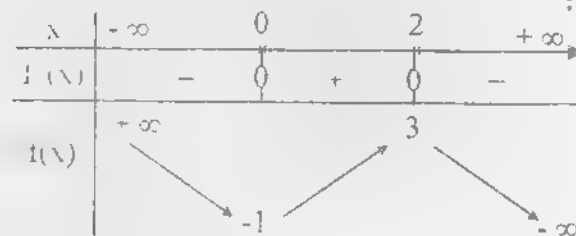
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(2-x)$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-

منه جدول تغيرات الدالة f :



$$f(0) = -1$$

$$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 - 1 = -8 + 12 - 1 = 3$$

لنحسب  $f(-1)$  و  $f(1)$  و  $f(3)$  كما يلي :

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$$

$$f(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 - 1 = 1$$

$$f(3) = -(3)^3 + 3(3)^2 - 1 = -1$$

نتائج :

بجدة :  $f$  مستمرة على  $[-1; 0]$   
 $f(-1) \times f(0) < 0$   
 $f$  متناقصة تماما على  $[-1; 0]$   
 $f$  مستمرة على  $[0; 1]$   
 $f(0) \times f(1) < 0$   
 $f$  متزايدة تماما على  $[0; 1]$

بجدة : المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا على  $[-1; 0]$

بجدة : المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا على  $[0; 1]$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ مستمرة على } [2; 3] \\ f(2) \times f(3) < 0 \\ f \text{ متناقصة تماما على } [2; 3] \end{array} \right\} (3) \quad \text{إذن : المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا على } [2; 3]$$

التمرين - 42

$$f \text{ دالة معرفة على المجال } [0; \pi] \rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{2} \sin x$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من  $[0; \pi]$  بحيث  $f(\alpha) = \alpha$ 

الحل - 42

$$g \text{ على المجال } [0; \pi] \rightarrow g(x) = 2 + \frac{1}{2} \sin x - x$$

لندرس تعبيرات الدالة  $g$  على المجال  $[0; \pi]$  :

$$g(0) = 2 + \frac{1}{2} \sin(0) - 0 = 2$$

$$g(\pi) = 2 + \frac{1}{2} \sin(\pi) - \pi = 2 - \pi$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cos x - 1$$

إشارة  $g'(x)$  :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{إذن :} \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \cos x \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - 1 \leq \frac{1}{2} \cos x - 1 \leq \frac{1}{2} - 1 \quad \text{إذن :}$$

$$-3/2 \leq g'(x) \leq -1/2 \quad \text{أي} \\ g'(x) < 0 \quad \text{منه :}$$

إذن : جدول تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[0; \pi]$  :

x	0	$\pi$
$g'(x)$		-
$g(x)$	2	$2 - \pi$

من جدول تغيرات الدالة  $g$  نستنتج أن : $g$  مستمرة على  $[0; \pi]$ 

$$g(0) \times g(\pi) < 0$$

 $g$  متناقصة تماما على  $[0; \pi]$ إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $[0; \pi]$  حيث  $g(\alpha) = 0$ أي : يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $[0; \pi]$  حيث  $2 + \frac{1}{2} \sin \alpha - \alpha = 0$ أي : يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $[0; \pi]$  حيث  $2 + \frac{1}{2} \sin \alpha = \alpha$ أي : يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $[0; \pi]$  حيث  $f(\alpha) = \alpha$  و هو المطلوب .

التمرين - 43

$$f \text{ دالة معرفة على } [0; +\infty[ \rightarrow f(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$$

1 - بين أن  $f$  متناقصة تماما على المجال  $D = ]0; 2[$ 

$$g \text{ دالة معرفة على } D \rightarrow g(x) = f(x) - x$$

2 - بين أن  $g$  متناقصة تماما على  $D$  .3 - أحسب  $g(0)$  و  $g(2)$  ثم استنتج أن المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حلا وحيدا في المجال  $D$  .

الحل - 43

1 -  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; 2[$  و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2(\sqrt{x} - \sqrt{2}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - \sqrt{2})$$

إذن :  $f'(x)$  من إشارة  $\sqrt{x} - \sqrt{2}$ لكن :  $0 < x < 2$  إذن :  $0 < \sqrt{x} < \sqrt{2}$

$$\text{منه : } 0 - \sqrt{2} < \sqrt{x} - \sqrt{2} < \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\text{أي : } -\sqrt{2} < \sqrt{x} - \sqrt{2} < 0$$

$$\text{أي : } f'(x) < 0$$

إذن :  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]0; 2[$

2 - لدينا :  $f$  متناقصة تماما على  $D$  حسب السؤال (1)

و الدالة  $x \mapsto -x$  متناقصة تماما على المجال  $D$

إذن : الدالة  $g$  متناقصة تماما على المجال  $D$  لأنها مجموع دالتين متناقصتين .

$$g(0) = (\sqrt{0} - \sqrt{2})^2 - 0 = 2 \quad -3$$

$$g(2) = (\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 - 2 = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [0; 2] \\ g(0) \times g(2) < 0 \\ g \text{ متناقصة تماما على } ]0; 2[ \end{array} \right\} \text{نتيجة :}$$

إذن : المعادلة  $g(x) = 0$  أي  $f(x) - x = 0$  أي  $f(x) = x$  تقبل حلا وحيدا في المجال  $D$  .

التمرين 44

تعتبر الدالتين  $g: x \mapsto -x^3$  و  $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$

من أن المنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  الممثلين للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها  $x_0$  حيث  $-7/8 < x_0 < -3/4$

الحل 44

- وحدت نقطة تقاطع بين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  فإن فاصلتها  $x$  تحقق المعادلة  $f(x) = g(x)$  أي  $f(x) - g(x) = 0$

نعرف الدالة  $h$  كمايلي :  $h: x \mapsto f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} + x^3$

لندرس تغيرات الدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$  :

$h$  معرفة على  $[-1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

$h$  قابلة للاشتقاق على  $]-1; +\infty[$  و دالتها المشتقة كمايلي :

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 3x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 \geq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \end{array} \right\} \text{فإن } h'(x) > 0 \text{ أي } \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 3x^2 > 0$$

$$\text{إذن : } h'(x) > 0 \text{ أي } \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 3x^2 > 0$$

أي  $h$  متزايدة تماما على  $]-1; +\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة  $h$  :

$x$	-1	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	-1	$+\infty$

$$h(-1) = \sqrt{-1+1} + (-1)^3 = -1$$

من جدول تغيرات الدالة  $h$  نستنتج أن لما  $x \in [-1; +\infty[$  فإن  $h(x) \in [-1; +\infty[$

بما أن العدد 0 عنصر من المجال  $[-1; +\infty[$  و الدالة  $h$  مستمرة على المجال  $[-1; +\infty[$  فإن المعادلة  $h(x) - 0$  تقبل حلا

على الأقل على المجال  $[-1; +\infty[$  و بما أن  $h$  متزايدة تماما فإن هذا الحل وحيد .

من جهة أخرى :

$$h\left(-\frac{7}{8}\right) = \sqrt{-\frac{7}{8}+1} + \left(-\frac{7}{8}\right)^3 = \sqrt{\frac{1}{8}} - \left(\frac{7}{8}\right)^3 < 0$$

$$h\left(\frac{-3}{4}\right) = \sqrt{\frac{-3}{4} + 1} + \left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{27}{64} = \frac{32-27}{64} = \frac{5}{64}$$

إذن  $\left. \begin{array}{l} h \text{ مستمرة على } [-7/8; -3/4] \\ h(-7/8) \times h(-3/4) < 0 \end{array} \right\}$

إذن حسب ميرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $h(x) = 0$  تقبل حلا على المجال  $[-7/8; -3/4]$

أي يوجد  $\alpha \in [-7/8; -3/4]$  حيث  $h(\alpha) = 0$  أي  $f(\alpha) = g(\alpha)$

منه النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$  مشتركة بين المنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  وهي وحيدة .

#### التمرين 45

$f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$  حيث  $a; b; c; d$  أعداد حقيقية. نسمي  $(C)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في معلم .

عين الأعداد  $a; b; c; d$  التي تحقق الشروط التالية في آن واحد :

✓ المنحنى  $(C)$  يشمل النقطة  $A(0; 4)$

✓ المنحنى  $(C)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند  $+\infty$  و  $-\infty$  معادلته  $y = 2x + 3$

✓ المنحنى  $(C)$  يقبل مستقيما مقاربا معادلته  $x = 1$

#### الحل 45

تكون النقطة  $A(0; 4)$  تنتمي إلى المنحنى  $(C)$  إذا وفقط إذا كان

$$f(0) = 4 \text{ أي : } a(0) + b + \frac{c}{0+d} = 4$$

$$\text{أي : } (1) \dots b + \frac{c}{d} = 4 \text{ حيث } d \neq 0$$

يكون المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مقارب للمنحنى  $(C)$  إذا وفقط إذا كان  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow 1} x + d = 0$  أي  $d = -1$

يكون المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x + 3$  مقاربا مائلا للمنحنى  $(C)$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$  إذا كان  $ax + b = 2x + 3$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ . أي  $a = 2$  و  $b = 3$

$$\text{إذن المساواة (1) تصبح : } 3 + \frac{c}{-1} = 4 \text{ أي : } 3 - c = 4$$

$$\text{أي : } c = -1$$

خلاصة :  $a = 2$  ;  $b = 3$  ;  $c = -1$  ;  $d = -1$  إذن :  $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x-1}$

#### التمرين 46

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$   $\rightarrow f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$

1 - عين الأعداد الحقيقية  $a; b; c; d$  بحيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$

2 - استنتج أن المنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$  يطلب تعيين معادلته

3 - حدد وضعية المنحنى  $(C)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$

#### الحل 46

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{x^2 + 2x + 1} \text{ إذن } f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2} - 1$$

لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 6x + 3 & x^2 + 2x + 1 \\ \underline{x^3 + 2x^2 + x} & \\ x^2 + 5x + 3 & \\ \underline{x^2 + 2x + 1} & \\ 3x + 2 & \end{array}$$



نتيجة :

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 3 = (x+1)(x^2 + 2x + 1) + (3x+2)$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{x^2 + 2x + 1} = x+1 + \frac{3x+2}{x^2 + 2x + 1} \quad \text{منه :}$$

$$\text{أي : } f(x) = x+1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2} \quad \text{و هو المطلوب .}$$

$$\text{إذن : } d=2 ; c=3 ; b=1 ; a=1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{(x+1)^2} \quad \text{2- لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2}$$

$= 0$  : إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = x+1$  مقارباً مائلاً للمنحنى (C) عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

$$f(x) - (x+1) = \frac{3x+2}{(x+1)^2} \quad \text{3- لدينا}$$

إذن إشارة  $f(x) - (x+1)$  من نفس إشارة  $3x+2$  لأن  $(x+1)^2 > 0$

x	$-\infty$	$-2/3$	$+\infty$
$3x+2$	-	0	+

خلاصة :

x	$-\infty$	$-2/3$	$+\infty$
$f(x) - (x+1)$	-	0	+

لما  $f(x) - (x+1) < 0 : x \in ]-\infty ; -2/3[$  : تحت (Δ)

لما  $f(x) - (x+1) = 0 : x \in \{-2/3\}$  : يقطع (Δ)

لما  $f(x) - (x+1) > 0 : x \in ]-2/3 ; +\infty[$  : فوق (Δ)

التمرين 47

f دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$  و (C) منحناها في معطى .

$$1- \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ ثم } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)]$$

2- استنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحنى (C) عند  $+\infty$

$$3- \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$4- \text{ عين العددين الحقيقيين } \alpha \text{ و } \beta \text{ حيث } \alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} ; \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \alpha x]$$

5- استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيماً مقارباً (Δ') عند  $-\infty$  - يطلب معادلته .

الحل 47

1- لتتحقق أن f معرفة على  $\mathbb{R}$  :

f معرفة إذا كان  $x^2 + 4x + 5 \geq 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$  : إذن : من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  فإن  $x^2 + 4x + 5 > 0$

منه : f معرفة على  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 5} - (x+2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 4x + 5} - (x - 2)] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + (x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + (x + 2)}}{\frac{x^2 + 4x + 5 - (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + (x + 2)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x + 2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

2 - حسب السؤال (1) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 2$  مقارب مائل للمنحنى (C) عند  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} = +\infty \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x} \quad -4$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$|x| = -x \quad \text{لأن لما } x \text{ يؤول إلى } -\infty \text{ فإن } -x = |x| \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = 0 \quad \text{لأن} \quad = -1$$

نتيجة :  $\alpha = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 5} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 4x + 5} + x \right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} - x}$$

$$\begin{aligned}
& - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(4 + \frac{5}{x})}{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} \\
& |x| = -x \quad \text{لأن في جوار } -\infty \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(4 + \frac{5}{x})}{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} \\
& = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(4 + \frac{5}{x})}{-x \left( \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1 \right)} \\
& = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{5}{x}}{- \left( \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1 \right)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad -\frac{4}{-2} = -2$$

نتيجة :  $\beta = -2$   
5- لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x + 2 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 2)] = 0 \quad \text{أي :}$$

منه : المستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة  $y = -x - 2$  مقارب مائل للمنحنى (C) عند  $-\infty$

**التمرين - 48**

f و g دالتان معرفتان على الترتيب على IR و  $IR^+$  كما يلي :

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4x} \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$1 - \text{أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \quad \text{ثم} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$2 - \text{أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + \frac{1}{2})] \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x + \frac{1}{2})]$$

ماذا تستنتج بالنسبة للسلوك التقاربي للدالتين f و g عند  $+\infty$  .

**الحل - 48**

$$1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + \frac{1}{2})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + \frac{1}{2})] \quad -2$$

$$\begin{aligned}
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + \frac{1}{2})] \times \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + \frac{1}{2})}{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + \frac{1}{2})} \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - (x + \frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + \frac{1}{2})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3/4}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}} \\
 &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 4x} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 4x} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + \frac{1}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)} + x + \frac{1}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{1}{4x}\right)}{x \sqrt{1 + \frac{4}{x}} + x + \frac{1}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{1}{4x}\right)}{x \left( \sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1 + \frac{1}{2x} \right)} \\
 \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ لأن } &= \frac{3}{\sqrt{1} + 1} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

نتيجة :

✓ عند  $+\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] = 0$  إذن منحنى الدالة  $f$  عند  $+\infty$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته

$y = x + \frac{1}{2}$  أي في جوار  $+\infty$  للدالة  $f$  تملك سلوك دالة تألفية من الشكل  $f(x) = x + \frac{1}{2}$

✓ عند  $+\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \neq 0$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $y = x + \frac{1}{2}$  ليس مقارب لمنحنى

الدالة  $g$  عند  $+\infty$  و للبحث عن سلوك تقاربي للدالة  $g$  عند  $+\infty$  لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \text{اي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (x + 2) = 0 \quad \text{اي :}$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 2$  مقارب لمنحنى الدالة  $g$  عند  $+\infty$   
منه الدالة  $g$  تسلك سلوك دالة تألفية من الشكل  $g(x) = x + 2$  عند  $+\infty$

#### التمرين - 49

$f$  دالة معرفة على  $[0; +\infty[$  بـ  $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$   
تسمى (C) منحنىها البياني في مستوي منسوب إلى معلم .  
1 - بين أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة  $y = 2x + 3$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$  .  
2 - أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و ( $\Delta$ )

#### الحل - 49

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x + 3) \quad -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2) \right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2} = 0$$

نتيجة : المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x + 3$  مقارب مائل للمنحنى (C) عند  $+\infty$   
2 - ندرس إشارة الفرق :  $f(x) - (2x + 3)$  على  $[0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f(x) - (2x + 3) &= x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x + 3) \\ &= \sqrt{x^2 + 4x} - x - 2 \\ &= \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2) \end{aligned}$$

لنبحث عن قيم  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  حتى يكون  $f(x) - (2x + 3) \geq 0$

$$f(x) - (2x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} \geq (x + 2) \dots (1)$$

بما أن  $x \in [0; +\infty[$  لأن  $x + 2 > 0$  و  $\sqrt{x^2 + 4x} \geq 0$

$$(\sqrt{x^2 + 4x})^2 \geq (x + 2)^2 \quad \text{فإن المتباينة (1) تكافئ}$$

$$x^2 + 4x \geq x^2 + 4x + 4 \quad \text{تكافئ}$$

$$0 \geq 4 \quad \text{تكافئ}$$

نتيجة : المتراجحة  $f(x) - (2x + 3) \geq 0$  لا تقبل حلول على  $[0; +\infty[$

إذن : من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  فإن  $f(x) - (2x + 3) < 0$

أي : المنحنى (C) دائما تحت المستقيم ( $\Delta$ ) من أجل  $x \in [0; +\infty[$

#### التمرين - 50

$$f$$
 دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

تسمى (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 - عين D مجموعة تعريف الدالة  $f$

2 - أحسب نهايات الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$

$$3- \text{أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2}x \right] \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x) + \frac{3}{2}x \right]$$

4- استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$ . يطلب تعيين معادلتيهما

5- حدد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$

الحل :- 50

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0

1- من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  فإن  $|x^2 - 1| \geq 0$

إذن : f معرفة على  $\mathbb{R}$  أي  $D = \mathbb{R}$

2- لنكتب f(x) دون القيمة المطلقة :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} : x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[ \\ -\frac{1}{2}x + \sqrt{1 - x^2} : x \in [-1 ; 1] \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} \text{لأن } |x| = x \text{ في جوار } +\infty &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ لأن } &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} \\ \text{لأن } |x| = -x \text{ في جوار } -\infty &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left( \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ لأن } = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x) + \frac{3}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{2}x \quad -3$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = +\infty \text{ لأن } = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2}x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4 - نتائج :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-\frac{3}{2}x)] = 0 \quad \diamond \quad \text{إذن المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = -\frac{3}{2}x \text{ مقارب مائل للمنحنى (C) عند } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \frac{1}{2}x] = 0 \quad \diamond \quad \text{إذن المستقيم } (\Delta') \text{ ذو المعادلة } y = \frac{1}{2}x \text{ مقارب مائل للمنحنى (C) عند } +\infty$$

5 - لندرس إشارة  $f(x) - (-\frac{3}{2}x)$  على IR

$$f(x) - (-\frac{3}{2}x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2-1|} + \frac{3}{2}x$$

$$= \sqrt{|x^2-1|} + x$$

$$f(x) - (-\frac{3}{2}x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|} + x \geq 0 \quad \text{منه :}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|} \geq -x \dots\dots (1)$$

إذن : نميز حالتين :

الحالة (1)  $x > 0$  إذن المتراجحة (1) دائما محققة

$$(\sqrt{|x^2-1|})^2 \geq (-x)^2 \quad \text{تكافئ} \quad \text{الحالة (2) } x \leq 0 \text{ إذن المتراجحة (1) تكافئ}$$

$$|x^2-1| \geq x^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2-1 \geq x^2 \text{ و } x \leq -1 \\ \text{أو} \\ 1-x^2 \geq x^2 \text{ و } -1 \leq x \leq 0 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2-1 \geq x^2 \text{ و } x \leq -1 \\ \text{أو} \\ 1-x^2 \geq x^2 \text{ و } -1 \leq x \leq 0 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$2x^2 \leq 1 \text{ و } -1 \leq x \leq 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$x^2 \leq 1/2 \text{ و } -1 \leq x \leq 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } -1 \leq x \leq 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$x > 0 : f(x) - (-\frac{3}{2}x) > 0 \text{ إذن (C) فوق } (\Delta) \quad \text{خلاصة : لما}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 0 : f(x) - (-\frac{3}{2}x) > 0 \text{ إذن (C) فوق } (\Delta) \quad \text{لما}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} : f(x) - (-\frac{3}{2}x) = 0 \text{ إذن (C) يقطع } (\Delta) \quad \text{لما}$$

$$x < -\frac{1}{\sqrt{2}} : f(x) - (-\frac{3}{2}x) < 0 \text{ إذن (C) تحت } (\Delta) \quad \text{لما}$$

لندرس إشارة  $f(x) - \frac{1}{2}x$  على IR

$$f(x) - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|} - \frac{1}{2}x$$

$$= \sqrt{|x^2 - 1|} - x$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} - x \geq 0 \quad \text{إن :}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} \geq x \dots\dots (1)$$

نميز حالتين :

الحالة (1)  $x < 0$  إذن المتراجحة (1) دائما محققة

$$(\sqrt{|x^2 - 1|})^2 \geq x^2 \quad \text{الحالة (2) } x \geq 0 \text{ إذن المتراجحة (1) تكافئ}$$

$$|x^2 - 1| \geq x^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 1 \text{ و } x^2 - 1 \geq x^2 \\ \text{أو} \\ 0 \leq x \leq 1 \text{ و } 1 - x^2 \geq x^2 \end{array} \right\} \quad \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 1 \text{ و } -1 \geq 0 \text{ (مستحيل)} \\ \text{أو} \\ 0 \leq x \leq 1 \text{ و } x^2 \leq 1/2 \end{array} \right\} \quad \text{تكافئ}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ و } \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{تكافئ}$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{تكافئ}$$

خلاصة : لما  $f(x) - \frac{1}{2}x > 0 : x < 0$  إذن المنحنى (C) فوق المستقيم ( $\Delta'$ )

لما  $f(x) - \frac{1}{2}x > 0 : 0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$  إذن المنحنى (C) فوق المستقيم ( $\Delta'$ )

لما  $f(x) - \frac{1}{2}x = 0 : x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  إذن المنحنى (C) يقطع المستقيم ( $\Delta'$ )

لما  $f(x) - \frac{1}{2}x < 0 : x > \frac{1}{\sqrt{2}}$  إذن المنحنى (C) تحت المستقيم ( $\Delta'$ )



## التمرين - 51

$f$  دالة معرفة على المجال  $]-2; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x + 2}$

نسمي (C) منحنىها في المستوى المنسوب إلى معلم .

$$1 - \text{أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ ثم } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$$

ليكن (P) المنحنى الممثل للدالة  $x \mapsto x^2$  في نفس المعلم

2 - اشرح لماذا المنحنيان (C) و (P) يتقاربان عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$

## الحل - 51

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$$

$$= +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x + 2} - x^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1 - x^2(x + 2)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2 - بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = 0$  فإن كلما إقتربت الفاصلة  $x$  من  $+\infty$  إقترب العدد  $f(x)$  من  $x^2$  أي

نقط المنحنى (C) متقاربة من نقط المنحنى (P) و عليه يمكن القول أن المنحنيان (C) و (P) متقاربان عند  $+\infty$

## التمرين - 52

$f$  دالة معرفة على  $]1; +\infty[$  بـ  $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x-1}$

نسمي (C) منحنىها في المستوى المنسوب إلى معلم .

1 - أبحث عن منحنى (P) مقارب لمنحنى (C) عند  $+\infty$  ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P)

2 - هل المنحنيان (C) و (P) متقاربان عند  $+\infty$  ؟

## الحل - 52

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - \frac{2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ لأن } \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x^2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - \frac{2}{x-1} - 3x^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x-1}$$

$$= 0$$

فإن المنحنى (C) يقترب من المنحنى (P) ذو المعادلة  $y = 3x^2$  عند  $+\infty$

وضعية (P) بالنسبة لـ (C)

لندرس إشارة  $f(x) - 3x^2$  على  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) - 3x^2 = \frac{-2}{x-1} = \frac{2}{1-x}$$

خلاصة : لما  $x < 1$  :  $f(x) - 3x^2 > 0$  : إذن (C) فوق (P)

لما  $x > 1$  :  $f(x) - 3x^2 < 0$  : إذن (C) تحت (P)

2- لدينا  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty; 1[$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x^2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x-1} = 0 \quad \text{و أيضا}$$

إذن : فعلا المنحنيان (P) و (C) متقاربان أيضا عند  $-\infty$ .

التمرين - 53

$f$  دالة معرفة على المجال  $R^*$  بـ  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$  و (C) منحناها .

أبحث عن منحنى (P) لدالة مرجعية مقارب لمنحنى (C) عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$  ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (P)

الحل - 53

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ f(x) - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \quad (\infty \text{ يعني } +\infty \text{ أو } -\infty)$$

إذن : المنحنى (P) الممثل للدالة المرجعية  $x \mapsto 1/x$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

الوضعية النسبية :  $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1}$  من إشارة  $x$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x) - \frac{1}{x}$	$-$	$0$	$+$

خلاصة : لما  $x < 0$  :  $f(x) - \frac{1}{x} < 0$  : إذن (C) تحت (P)

لما  $x > 0$  :  $f(x) - \frac{1}{x} > 0$  : إذن (C) فوق (P).

التمرين - 54

$f$  دالة معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$  و (C) منحناها .

أبحث عن منحنى (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$  ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P)

الحل - 54

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$= 0$$

فإن المنحنى (P) الممثل للدالة المرجعية  $x \mapsto \sqrt{x}$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$

الوضعية النسبية :  $f(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

بما أن  $x > 0$  فإن  $\frac{1}{x\sqrt{x}} > 0$  أي  $f(x) - \sqrt{x} > 0$

منه : المنحنى (C) فوق المنحنى (P) من أجل  $x > 0$

التمرين - 55

$f$  دالة معرفة على المجال  $R - \{-1; 4\}$  بـ  $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-3x-4}$

1- أوجد الأعداد الحقيقية  $a$  ;  $b$  ;  $c$  بحيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R - \{-1; 4\}$

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4} \quad \text{يكون :}$$

2- أحسب نهايات الدالة  $f$  على حدود مجموعة تعريفها .

$$\begin{aligned}
 a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4} &= \frac{a(x+1)(x-4) + b(x-4) + c(x+1)}{(x+1)(x-4)} \quad -1 \\
 &= \frac{ax^2 - 3ax - 4a + bx - 4b + cx + c}{x^2 - 3x - 4} \\
 &= \frac{ax^2 + (b+c-3a)x - 4a - 4b + c}{x^2 - 3x - 4}
 \end{aligned}$$

إذن : يكون  $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4}$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R - \{-1; 4\}$  إذا وفقط

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 \\ (1) \dots b+c &= 2+3 \\ (2) \dots -4b+c &= 4 \end{aligned} \right\} \text{ أي } \left. \begin{aligned} a &= 1 \\ b+c-3a &= 2 \\ -4a-4b+c &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ إذا كان :}$$

$$\begin{aligned}
 b+c - (-4b+c) &= 5-4 & \text{ بطرح (2) من (1) نحصل على :} \\
 5b &= 1 & \text{ أي :} \\
 b &= 1/5 & \text{ أي :}
 \end{aligned}$$

$$c = 5 - b = 5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5} \quad \text{منه حسب العلاقة (1)}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1/5}{x+1} + \frac{24/5}{x-4} \quad \text{نتيجة :}$$

2 - لدينا مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي :  $D = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 4[ \cup ]4; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1/5}{x+1} + \frac{24/5}{x-4} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} 1 + \frac{1/5}{x+1} + \frac{24/5}{x-4} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} 1 + \frac{1/5}{y} + \frac{24/5}{-1-4} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} 1 + \frac{1/5}{x+1} + \frac{24/5}{x-4} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} 1 + \frac{1/5}{y} + \frac{24/5}{-1-4} \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} 1 + \frac{1/5}{x+1} + \frac{24/5}{x-4} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} 1 + \frac{1/5}{4+1} + \frac{24/5}{y} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} 1 + \frac{1/5}{x+1} + \frac{24/5}{x-4} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} 1 + \frac{1/5}{4+1} + \frac{24/5}{y} \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1/5}{x+1} + \frac{24/5}{x-4} = 1$$

## التمرين 56

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3} = 4$$

## الحل 56

1 - نعرف الدالة  $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$  :

$f$  معرفة وقابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق  $f'(0)$  هو كما يلي :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{تعريفا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1/2$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = f'(0) = 1/2$$

نتيجة :

2 - نفس الدالة  $f$  المعرفة في (1) قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق  $f'(3)$  هو :

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \quad \text{تعريفا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3+1}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = 1/4$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = f'(3) = 1/4$$

نتيجة :

3 - نعرف الدالة  $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$  :

$f$  معرفة وقابلة للاشتقاق عند 1 و عددها المشتق  $f'(1)$  هو كما يلي :

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{تعريفا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 + 1}}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

نتيجة :

4 - نعرف الدالة  $f: x \mapsto x\sqrt{x+1}$  : $f$  معرفة وقابلة للإشتقاق عند 3 و عددها المشتق  $f'(3)$  هو كما يلي :

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

تعريفا :

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 3\sqrt{3+1}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x - 3}$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x+1} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(3) = \frac{3(3) + 2}{2\sqrt{3+1}} = 11/4$$

منه :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x - 3} = f'(3) = 11/4$$

نتيجة :

5 - نعرف الدالة  $f: x \mapsto \sin x$  : $f$  معرفة وقابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق  $f'(0)$  هو كما يلي :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

تعريفا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$f'(x) = \cos x$$

الدالة المشتقة :

$$f'(0) = \cos 0 = 1$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f'(0) = 1$$

نتيجة :

6 - نعرف الدالة  $f: x \mapsto 1 - \cos x$  : $f$  معرفة وقابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق  $f'(0)$  هو كما يلي :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

تعريفا :

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) - (1 - \cos 0)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{\cos x}{x}$$

$$f'(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

$$f'(0) = \sin(0) = 0$$

الدالة المشتقة :

منه :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = f'(0) = 0$$

نتيجة :

7 - نعرف الدالة  $f : x \mapsto \cos x$

$f$  معرفة وقابلة للإشتقاق عند  $\pi/2$  و عددها المشتق  $f'(\pi/2)$  هو كما يلي :

$$f'(\pi/2) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \frac{\pi}{2}} \quad \text{تعريفاً :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$f'(x) = -\sin x$$

الدالة المشتقة :

$$f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

نتيجة :

التمرين 57

باستعمال تعريف العدد المشتق عند  $\pi/3$  لكل من الدالتين  $f : x \mapsto \sin 3x$  ;  $g : x \mapsto 2 \cos x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1} \quad \text{احسب}$$

الحل - 57

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \sin 3x = \sin \left[ 3 \times \frac{\pi}{3} \right] = 0 \quad \text{لاحظ أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} 2 \cos x - 1 = 2 \cos \frac{\pi}{3} - 1 = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1} \quad \text{إذن :}$$

إذن لنحسب هذه النهاية باستعمال العدد المشتق للدوال  $f$  و  $g$  عند  $\pi/3$  كما يلي :

$$f'(\pi/3) = \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{f(x) - f(\pi/3)}{x - \frac{\pi}{3}} \quad \text{تعريفاً لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin 3x - \sin 3 \times \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$f'(x) = 3 \cos 3x$$

الدالة المشتقة :

$$f'(\pi/3) = 3 \cos 3 \times \frac{\pi}{3} = 3 \cos \pi = -3 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = f'(\pi/3) = -3$$

نتيجة (1) :

$$g'(\pi/3) = \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{g(x) - g(\pi/3)}{x - \pi/3} \quad \text{تعريفنا لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{(2 \cos x - 1) - (2 \cos \frac{\pi}{3} - 1)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2 \cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$g'(x) = -2 \sin x \quad \text{الدالة المشتقة :}$$

$$g'(\pi/3) = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{3} \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2 \cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} = g'(\pi/3) = -\sqrt{3} \quad \text{نتيجة (2) :}$$

نرجع الآن إلى السؤال :

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1} \times \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{2 \cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{f'(\pi/3)}{g'(\pi/3)} \quad \text{حسب النتيجة (1) و النتيجة (2)} \\ &= \frac{-3}{-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3} \quad \text{وهو المطلوب .}$$

ملاحظة هامة : الدالتين  $f$  و  $g$  قابلتان للإشتقاق عند  $\pi/3$  لذلك هذه النتيجة صحيحة و إلا فلا يمكن حساب النهاية بهذه الطريقة

$$\lim_{x \geq 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = 2\sqrt{2} \quad \text{التمرين 58} \quad \text{أثبت أن}$$

الحل 58

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \geq 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \geq 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} : x \geq 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \geq 0} \frac{2 \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \geq 0} \frac{2 \sqrt{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \cdot \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$\lim_{x \geq 0} \frac{2 \sqrt{1 - \cos x} \cdot \sqrt{1 + \cos x} \cdot \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \geq 0} 2 \sqrt{1 + \cos x} \cdot \cos x$$

$$2\sqrt{1 + \cos 0} \cdot \cos 0$$

$$= 2\sqrt{2} \text{ و هو المطلوب}$$

## التمرين - 59

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x + 1}\right) = -4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} = -5 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1 + x}\right) = -3$$

## الحل - 59

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1 \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} x - \pi = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x + 3}{1 + x} = \pi \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1 + x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \pi = 0 \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x + 1}{2x + 1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad -4$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\tan x (\tan x + \frac{1}{\tan x})} = -5$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\tan x + \frac{1}{\tan x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = +\infty \quad \text{لأن} \quad = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y + \frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0$$

## التمرين - 60

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{أحسب} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} \quad \text{علما أن}$$

## الحل - 60

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} \times \frac{3}{3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \times \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \quad \text{لأن} \quad = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

## التمرين - 61

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} \quad f \text{ دالة معرفة على } ]-1; +\infty[ \rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{1- بين أن إذا كان } x > 1 \text{ فإن}$$

$$2- \text{ إستنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$



### الحل - 61

1 - لدينا  $x > 1$  إذن :  $x + x > 1 + x$  (بضيف  $x$  إلى الطرفين)

$$2x > x + 1 \quad \text{أي :}$$

$$\sqrt{2x} > \sqrt{x+1} \quad \text{منه :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad \text{أي :}$$

$$\text{أو :} \quad \frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$2 - \text{لدينا} \quad \frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{من أجل} \quad x > 1$$

بضرب هذه المتباينة في العدد الموجب  $2x$  نحصل على :

$$\text{من أجل} \quad x > 1 \quad \text{أي} \quad x > 0 \quad \frac{2x}{\sqrt{x+1}} > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$$

$$\text{أي} \quad f(x) > \sqrt{2x} \quad \text{من أجل} \quad x > 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) > \sqrt{2x} \quad \text{لما} \quad x > 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} = +\infty \end{array} \right\} \quad \text{نتيجة :}$$

$$\text{إذن : حسب مبرهنة الحصر فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

### التمرين - 62

1 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $-2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$

$$2 - \text{إستنتج} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2}$$

### الحل - 62

1 - من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا :  $-1 \leq \sin x \leq 1$  ..... (1)

و :  $-1 \leq \cos x \leq 1$  ..... (2)

$$\text{إذن :} \quad -1 - 1 \leq \sin x + \cos x \leq 1 + 1$$

أي :  $-2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$  ..... (3)

2 - من أجل  $x$  يؤول إلى  $+\infty$  فإن  $\frac{1}{x^2} > 0$  إذن : بصرب اطراف المتباينة (3) في  $\frac{1}{x^2}$  فنحصل على

$$\frac{-2}{x^2} \leq \frac{\sin x + \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

$$\text{بما أن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2} = 0$$

### التمرين - 63

1 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x \geq 1$  :  $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$

2 - إستنتج النهايتين التاليتين :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$

### الحل - 63

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} &= \frac{2x - x - 1}{2(x+1)} \\ &= \frac{x-1}{2(x+1)} \end{aligned} \quad -1$$

$$\left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{array} \right\} \text{فإن } x \geq 1$$

$$\text{منه : } \frac{x-1}{2(x+1)} \geq 0 \text{ أي } \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \geq 0 \text{ أي } \frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{من جهة أخرى : } \frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x-x-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$$

$$(2) \dots\dots\dots \frac{x}{x+1} < 1 \text{ أي } \frac{-1}{x+1} < 0 \text{ فإن } x+1 > 0 \text{ أي } x \geq 1$$

$$\text{من (1) و (2) فإن } \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$$

$$2- \text{لدينا } \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1 \text{ إذن : } \frac{1}{2} \sqrt{x} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x+1} < \sqrt{x} \text{ من أجل } x > 0$$

$$\text{لكن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty \text{ حسب مبرهنة الحصر } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{أيضا } \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1 \text{ إذن : } \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} < \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ من أجل } x > 0$$

$$\text{لكن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ حسب مبرهنة الحصر } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \text{ إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$$

## التمرين - 64

أدرس إستمرارية الدالة  $f$  عند  $0$  في كل حالة ممايلي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases} \quad -1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|} & : x \neq 0 \\ 2 & : x = 0 \end{cases} \quad -2$$

## الحل - 64

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \quad -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{0+1}+1}$$

$$= 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \text{بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ فإن}$$

أي الدالة  $f$  مستمرة عند  $0$ .  

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|}$$

بميز حالتين :

الأولى :  

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

الثانية :  

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \sqrt{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{-x} = 0$$

منه :  

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

لكن  $f(0) = 2$

أي  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

منه : الدالة  $f$  ليست مستمرة عند  $0$ .

تمرين 65  
 1 دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow$   $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} & : x \neq 0 \\ \alpha & : x = 0 \end{cases}$

عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون الدالة  $f$  مستمرة عند  $0$ .

الحل 65

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} \times \frac{x+2+\sqrt{4+x^2}}{x+2+\sqrt{4+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - (4+x^2)}{x(x+2+\sqrt{x^2+4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+4x+4-4-x^2}{x(x+2+\sqrt{x^2+4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x+2+\sqrt{x^2+4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+2+\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{4}{0+2+\sqrt{0+4}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

نتيجة : تكون  $f$  مستمرة عند  $0$  إذا وفقط إذا كان  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  أي  $1 = f(0)$

منه :  $\alpha = 1$  وهو المطلوب

تمرين 66  
 1 دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow$   $f(x) = \begin{cases} x^2+2x-a & : x > 2 \\ \frac{2x^2-a+b}{2} & : x \leq 2 \end{cases}$

عين علاقة بين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  حتى تكون الدالة  $f$  مستمرة عند  $2$ .

الحل 66

$$f(2) = \frac{2(2)^2 - a + b}{2} = \frac{8 - a + b}{2}$$

لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - a + b}{2} = \frac{2(2)^2 - a + b}{2} = \frac{8 - a + b}{2}$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x - a = (2)^2 + 2(2) - a = 8 - a \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) : \text{نتيجة : تكون } f \text{ مستمرة عند } 2 \text{ إذا وفقط إذا كان}$$

$$\frac{8 - a + b}{2} = 8 - a \quad \text{أي :}$$

$$8 - a + b = 16 - 2a \quad \text{أي :}$$

$$2a - a + b = 16 - 8 \quad \text{أي :}$$

$$a + b = 8 \quad \text{أي : و هي العلاقة المطلوبة .}$$

التمرين 67

$f$  دالة مستمرة على المجال  $[0 ; 1]$  حيث من أجل كل  $x$  من  $[0 ; 1]$  فإن  $f(x) \in [0 ; 1]$  بين أن يوجد على الأقل عدد حقيقي  $\alpha$  من  $[0 ; 1]$  حيث  $f(\alpha) = \alpha$

الحل 67

لنعتبر الدالة  $g$  على المجال  $[0 ; 1]$  حيث  $g(x) = f(x) - x$

لدينا  $g$  هي مجموع دالتين مستمرتين على  $[0 ; 1]$  هما  $f : x \mapsto f(x)$  و  $x \mapsto -x$

إذن  $g$  هي دالة مستمرة على  $[0 ; 1]$

من جهة أخرى :  $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$

$$g(1) = f(1) - 1 \quad \text{و}$$

بما أن  $f(x) \in [0 ; 1]$  من أجل  $x \in [0 ; 1]$  فإن

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq f(0) \leq 1 \\ 0 \leq f(1) \leq 1 \end{array} \right\} \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) \geq 0 \\ f(1) - 1 \leq 0 \end{array} \right\} \text{ أي}$$

خلاصة :  $g$  مستمرة على  $[0 ; 1]$

$$g(0) \times g(1) \leq 0$$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل  $\alpha$  من  $[0 ; 1]$

$$g(\alpha) = 0 \quad \text{حيث}$$

$$f(\alpha) - \alpha = 0 \quad \text{أي}$$

$$f(\alpha) = \alpha \quad \text{أي و هو المطلوب}$$

التمرين 68

$f$  دالة معرفة على المجال  $[-\pi ; 0]$  بـ  $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$

1 - تحقق أن  $f$  تقبل الاشتقاق على المجال  $[-\pi ; 0]$  ثم أحسب دالتها المشتقة .

2 - شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[-\pi ; 0]$

3 - ماذا تستنتج بالنسبة لحلول المعادلة  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  على المجال  $[-\pi ; 0]$

الحل 68

1 -  $f$  هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على  $[-\pi ; 0]$  وهما :  $x \mapsto \cos x$  و  $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}x$

إذن :  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[-\pi ; 0]$  و دالتها المشتقة :

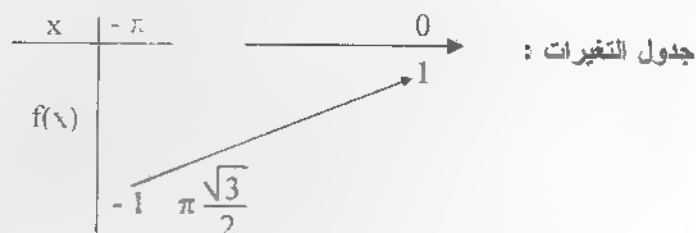
$$f'(x) = -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 - إشارة  $f'(x)$  على  $[-\pi ; 0]$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$$

$$\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \text{و هذا محقق دائما من أجل } x \in [-\pi ; 0] \text{ لأن } \sin x \leq 0$$

إذن :  $f$  متزايدة على المجال  $[-\pi ; 0]$



$$f(-\pi) = \cos(-\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\pi) = -1 - \pi \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(0) = \cos(0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(0) = 1$$

3 - حسب جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[-\pi; 0]$  لدينا مايلي :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ مستمرة على } [-\pi; 0] \\ f \text{ متزايدة تماما على } [-\pi; 0] \\ f(-\pi) \times f(0) < 0 \end{array} \right\}$$

إذن : المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $[-\pi; 0]$

أي : المعادلة  $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $[-\pi; 0]$

أي : المعادلة  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $[-\pi; 0]$  و هو المطلوب .

#### التمرين 69

$n$  عدد طبيعي غير معدوم

1 - بين أن المعادلة  $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$  تقبل حلا محصورا بين  $\frac{2n}{n+1}$  و 2 .

2 - هل المعادلة  $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$  تقبل حلا على  $\mathbb{R}$  ؟ إذا كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل .

#### الحل 69

1 - نعرف الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$  حيث  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{لاحظ أن من أجل } n \in \mathbb{N}^* \text{ فإن } 2 - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2-2n}{n+1} = \frac{2}{n+1} > 0$$

$$\text{إذن : } 2 > \frac{2n}{n+1}$$

لندرس الآن تعبيرات الدالة  $f$  على المجال  $[\frac{2n}{n+1}; 2]$

$f$  كثير حدود إذن قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n+1)x^n - 2nx^{n-1} \\ &= x^{n-1}[(n+1)x - 2n] \end{aligned}$$

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $[\frac{2n}{n+1}; 2]$  حيث  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{بما أن } x > 0 \text{ فإن } x^{n-1} > 0$$

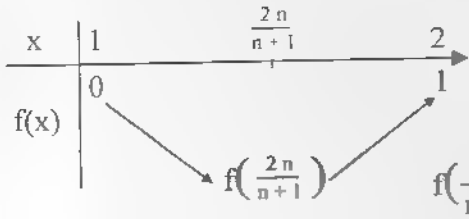
إذن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $(n+1)x - 2n$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$\frac{2n}{n+1}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	+	

إذن على المجال  $[\frac{2n}{n+1}; 2]$  فإن  $f'(x) > 0$  أي  $f$  متزايدة .

ليكن  $n > 1$

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $[\frac{2n}{n+1}; 2]$  كما يلي :



$$f(1) = (1)^{n+1} - 2(1)^n + 1 = 0$$

$$f(2) = (2)^{n+1} - 2(2)^n + 1 = 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = 1$$

لاحظ أن

إذن : بما أن  $f$  متناقصة على  $\left[1; \frac{2n}{n+1}\right]$  فإن  $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < f(1)$

$$f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0 \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{aligned} &f \text{ مستمرة على } \left[\frac{2n}{n+1}; 2\right] \\ &f\left(\frac{2n}{n+1}\right) \times f(2) < 0 \end{aligned} \right\} \text{ خلاصة :}$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا محصورا بين  $\frac{2n}{n+1}$  و 2

أي المعادلة  $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$  تقبل حلا على المجال  $\left[\frac{2n}{n+1}; 2\right]$  من أجل  $n > 1$

من أجل  $n = 1$  فإن  $f(x) = x^2 - 2x + 1$

إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا مضاعفا هو  $x = 1$

2 - لاحظ أن المعادلة  $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$  نكتب من الشكل :

$$x^{7+1} - 2x^7 + 1 = 0$$

إذن : هي معادلة السؤال (1) من أجل  $n = 7$

و عليه فالمعادلة  $x^{7+1} - 2x^7 + 1 = 0$  تقبل على الأقل حلين أحدهما يساوي 1 و الآخر محصور بين  $\frac{2(7)}{7+1}$  و 2 أي محصور بين  $7/4$  و 2

التمرين - 70

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$   $\rightarrow f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$  وليكن (C) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد

$(O; \vec{i}; \vec{j})$  حيث  $OI = 2 \text{ cm}$  و  $OJ = 1 \text{ cm}$

1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

2 - عين الأعداد الحقيقية  $a; b; c; d$  حيث : من أجل كل  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته  $y = x - 2$

3 - أدرس وضعية (C) بالنسبة لـ (d) و لتكن A نقطة تقاطعهما .

4 - أرسم كل من (C) و (d)

5 - بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-\infty; 1[$  .

6 - ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة  $f(x) = x + m$  حيث  $m$  بسيط حقيقي .

7 - ناقش تحليليا (دون استعمال البيان) عدد حلول المعادلة  $f(x) = x + m$  .

الحل - 70

1 - التغيرات :  $f$  معرفة على  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1-4+8-4}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1-4+8-4}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$f$  دالة ناطقة إذن قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)[3x^3 - 8x^2 + 8x - 3x^2 + 8x - 8 - 2x^3 + 8x^2 - 16x + 8]}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

من إشارة  $x^2(x-1)(x-3)$  إشارة  $f'(x)$  على  $R - \{1\}$  :

$x$	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$x^2$	+	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
الجداء	+	0	+	-	+

منه جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $R - \{1\}$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{11}{4}$	$+\infty$	

$$f(3) = \frac{27 - 36 + 24 - 4}{4} = \frac{27 - 36 + 20}{4} = \frac{47 - 36}{4} = \frac{11}{4}$$

2- تعيين الأعداد  $a$  ;  $b$  ;  $c$  ;  $d$  :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

لنجري القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 8x - 4 & x^2 - 2x + 1 \\ x^3 - 2x^2 + x & x - 2 \\ \hline -2x^2 + 7x - 4 & \\ -2x^2 + 4x - 2 & \\ \hline 3x - 2 & \end{array}$$

نتيجة :

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x - 2 + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

أي :

$$f(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

منه :  $d = -2$  ;  $c = 3$  ;  $b = -2$  ;  $a = 1$

لما أن

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (x-2) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} - (x-2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2} = 0$$

فإن المستقيم (d) ذو المعادلة  $y = x - 2$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$  و عند  $-\infty$  - 3  
وضعية (C) بالنسبة لـ (d) :

$$f(x) - (x - 2) = \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

إذن : إشارة  $f(x) - (x - 2)$  هي إشارة  $3x - 2$  لأن المقام موجب .

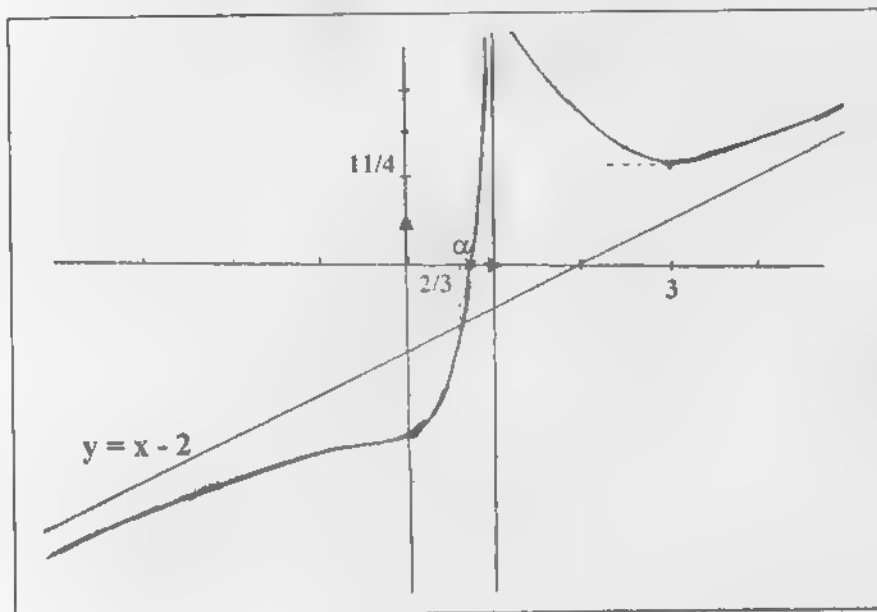
x	$-\infty$	$2/3$	1	$+\infty$
$3x - 2$	-	0	+	+

خلاصة :

لما  $f(x) - (x - 2) < 0 : x \in ]-\infty ; 2/3[$  تحت (C) (d)

لما  $f(x) - (x - 2) = 0 : x = 2/3$  (C) يقطع (d)

لما  $f(x) - (x - 2) > 0 : x \in ]2/3 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$  فوق (C) (d)



ملاحظة : النقطة ذات الإحداثيات  $(0 ; -4)$  هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) (تتعدم المشتقة الأولى و لا تغير إشارتها)

5- حسب منحنى الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty ; 1[$  فإن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $2/3 < \alpha < 1$

إذن : المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-\infty ; 1[$

6- ليكن  $(\Delta_m)$  المستقيم ذو المعادلة  $y = x + m$

لاحظ أن ميل المستقيم  $(\Delta_m)$  ثابت يساوي 1

إذن لما الوسيط  $m$  يتغير فإن المستقيم  $(\Delta_m)$  يوازي المستقيم ذو المعادلة  $y = x - 2$  أي المستقيم المقارب منه المناقشة التالية:

(1) لما  $m = -2$  :  $(\Delta_m)$  ينطبق على (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطة واحدة فاصلتها 2/3 إذن المعادلة

$$f(x) = x + m \text{ تقبل حلا وحيدا هو } 2/3$$

(2) لما  $m < -2$  :  $(\Delta_m)$  يمكن أن يكون مماس لـ المنحنى (C) إذن لنبحث عن معادلة المماس ذات الميل الذي يساوي 1

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-3) - (x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = (x^2 - 2x + 1)(x-1)$$



$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1/3$$

منه معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $1/3$  هي :  $y = 1(x - \frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3})$

$$\text{لنحسب } f(\frac{1}{3}) : f(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 4}{4/9}$$

$$= \frac{1 - 12 + 72 - 108}{27} \times \frac{9}{4}$$

$$= -\frac{47}{27} \times \frac{9}{4}$$

$$= -\frac{47}{12}$$

$$y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12} \quad \text{إن معادلة المماس هي :}$$

$$y = x + \frac{-4 - 47}{12} \quad \text{أي :}$$

$$y = x - \frac{51}{12} \quad \text{أي :}$$

$$y = x - \frac{17}{4} \quad \text{أي :}$$

إذن : لما  $m = -17/4$  :  $\Delta_m$  مماس لـ (C) أي المعادلة تقبل حلا واحدا

لما  $m < -17/4$  :  $\Delta_m$  تحت المماس إذن المعادلة لا تقبل حلول

لما  $-17/4 < m < -2$  :  $\Delta_m$  فوق المماس إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين

(3) لما  $m > -2$  :  $\Delta_m$  يقع فوق (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطتين مختلفتين ومنه المعادلة  $f(x) = x + m$  تقبل حلين مختلفين

7 - حل المعادلة  $f(x) = x + m$  في  $R - \{1\}$

$$f(x) = x + m \Leftrightarrow \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x + m \quad \text{حيث } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (x + m)(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = x^3 - 2x^2 + x + mx^2 - 2mx + m$$

$$\Leftrightarrow (m + 2)x^2 - (7 + 2m)x + 4 + m = 0 \dots\dots (1)$$

المناقشة :

$$\text{لما } m = -2 \text{ المعادلة تكافئ : } -(7 - 4)x + 4 - 2 = 0$$

$$\text{أي : } -3x + 2 = 0$$

$$\text{أي : } x = 2/3$$

إذن المعادلة  $f(x) = x + m$  تقبل حلا وحيدا  $x = 2/3$

لما  $m \neq -2$  المعادلة من الدرجة الثانية ذات الوسيط  $m$  و المجهول  $x$

$$\Delta = (7 + 2m)^2 - 4(4 + m)(m + 2)$$

$$= 49 + 28m + 4m^2 - 4(4m + 8 + m^2 + 2m)$$

$$= 49 + 28m + 4m^2 - 16m - 32 - 4m^2 - 8m$$

$$= 4m + 17$$

منه

$x$	$-\infty$	$-17/4$	$-2$	$+\infty$
$\Delta$	$-$	$0$	$+$	$+$

- إذن : لما  $\Delta < 0 : m \in ]-\infty ; -17/4[$  إذن المعادلة لا تقبل حلول في IR  
لما  $\Delta = 0 : m = -17/4$  إذن المعادلة تقبل حل مضاعف .  
لما  $\Delta > 0 : m \in ]-17/4 ; -2[ \cup ]-2 ; +\infty[$  إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين .

## التمرين - 71

$$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1} \rightarrow \text{IR}$$

نسمي (C) منحنىها في مستوي منسوب إلى معلم متعلم و متجاس .

- 1 - أكتب  $f(x)$  دون رمز القيمة المطلقة .
- 2 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  .
- 3 - بين أن المستقيمان  $(\Delta) : y = x+1$  و  $(\Delta') : y = -x-1$  مقاربين للمنحنى (C) عند  $+\infty$  و  $-\infty$  على الترتيب .

4 - أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .

5 - بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-1 ; 1[$

## الحل - 71

$$f(x) = \begin{cases} x+1 + \frac{x}{x^2-1} & : x+1 \geq 0 \\ -x-1 + \frac{x}{x^2-1} & : x+1 < 0 \end{cases} \quad -1$$

$$= \begin{cases} x+1 + \frac{x}{x^2-1} & : x \in [-1 ; +\infty[ \\ -x-1 + \frac{x}{x^2-1} & : x \in ]-\infty ; -1[ \end{cases}$$

2 - التغيرات :

$$D_f = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ \text{ أي } R - \{-1 ; 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x-1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -x-1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow 0} -(-1)-1 + \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x+1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow 0} -1+1 + \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow 0} 1+1 + \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow 0} 1+1 + \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in ]-1 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ \\ -1 + \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in ]-\infty ; -1[ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in ]-1 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ \\ -\left(1 + \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right) & : x \in ]-\infty ; -1[ \end{cases}$$

إشارة  $f'(x)$  :

$$f'(x) < 0 \text{ : إذن } f'(x) = -\left(1 + \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right) \text{ لدينا : } ]-\infty ; -1[$$

$$1 + \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} > 0 \quad \text{لأن}$$

على المجال  $]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  لدينا :  $f'(x) = 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$  لندرس إشارتها

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \leq 1$$

$$\begin{aligned} (x^2-1)^2 > 0 \quad \text{و} \quad 1+x^2 > 0 \quad \text{لأن} \quad &\Leftrightarrow 1+x^2 \leq (x^2-1)^2 \\ &\Leftrightarrow 1+x^2 \leq x^4 - 2x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2-3) \geq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2$			+	0	+	
$x^2-3$	+	0		-	0	+
الجداء	+	0	-	0	-	+

إذن على المجال  $]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  لدينا :

x	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	-	+

خلاصة : إشارة  $f'(x)$  على مجموعة تعريف الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها :

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$f(\sqrt{3})$	$+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x-1)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x-1 + \frac{x}{x^2-1} \right) - (-x-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2-1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad -3$$

إذن المستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة  $y = -x-1$  مقارب للمنحنى (C) عند  $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x+1 + \frac{x}{x^2-1} \right) - (x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x+1$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$

4 - وضعية  $(\Delta)$  بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  :

$$f(x) - (x+1) = \frac{x}{x^2-1} : ]-1; +\infty[ \text{ على المجال}$$

x	-1	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$x^2 - 1$		-		+
$\frac{x}{x^2-1}$	+	0	-	+

لما  $f(x) - (x+1) > 0 : x \in ]-1; 0[ \cup ]1; +\infty[$  إذن (C) فوق  $(\Delta)$

لما  $f(x) - (x+1) = 0 : x = 0$  إذن (C) يقطع  $(\Delta)$

لما  $f(x) - (x+1) < 0 : x \in ]0; 1[$  إذن (C) تحت  $(\Delta)$

$$f(x) - (-x-1) = \frac{x}{x^2-1} : ]-\infty; -1[ \text{ على المجال}$$

x	$-\infty$	-1
x	-	-
$x^2 - 1$	+	
$\frac{x}{x^2-1}$	-	

لما  $f(x) - (-x-1) < 0 : x \in ]-\infty; -1[$  إذن (C) تحت  $(\Delta')$

5 - من جدول تغيرات الدالة f نستنتج مايلي :

$f$  مستمرة على  $] -1; 1[$

$f$  متناقصة تماما على  $] -1; 1[$

$f$  تأخذ قيم موجبة ثم قيم سالبة إذن تمر بالعدد 0 .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $] -1; 1[$  حيث  $f(\alpha) = 0$

## الجداء السلمي

الجداء السلمي في الفضاء

تعريف :

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان من الفضاء

$\vec{AC} = \vec{v}$  و  $\vec{AB} = \vec{u}$  حيث  $C, B, A$  ثلاث نقط

حد على الأقل مستو (P) يشمل النقط  $C, B, A$  بحيث الجداء السلمي للشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  هو الجداء السلمي

شعاعين  $\vec{AB}, \vec{AC}$  في المستوي (P)

خص : كل خواص الجداء السلمي في المستوي تنقى صحيحة على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء و أهمها مايلي :

— أجل  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  أشعة من الفضاء من نفس المستوي و من أجل  $k \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \quad -$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad -$$

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot k\vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad -$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad -$$

$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad -$$

— يكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدان إذا و فقط إذا كان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

— الشعاع المعلوم  $\vec{0}$  عمودي على كل أشعة الفضاء .

— طريقة التحليلية للجداء السلمي في الفضاء

— أساس متعامد و متجانس . إذا كان  $\vec{u}(x; y; z)$  و  $\vec{v}(x'; y'; z')$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

سمة : إذا كانت  $A(x; y; z)$  و  $B(x'; y'; z')$  نقطتان فإن المسافة بينهما :

$$AB = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

نظ :

من عدد متعامد و متجانس من الفضاء نعتبر النقط  $A(-1; -2; 0)$  ;  $B(3; 1; -2)$  ;  $C(-2; 0; 1)$

$D(2; -1)$

— هل المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ؟

— هل المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان ؟

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{إن :} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1+2 \\ -2-0 \end{pmatrix} \quad -$$

$$\vec{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{إن :} \quad \vec{CD} \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \quad -$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 4(4) + 3(-1) + (-2)(-1) = 16 - 3 + 2 = 15 \quad \text{إن :}$$

سمة :  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} \neq 0$  إن : (AB) و (CD) ليسا متعامدان .

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{إن :} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -2+1 \\ 0+2 \\ 1-0 \end{pmatrix} \quad -$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4(-1) + 3(2) + (-2)(1) = -4 + 6 - 2 = 0 \quad \text{منه :}$$

سمة :  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$  إن : (AB) و (AC) متعامدان .

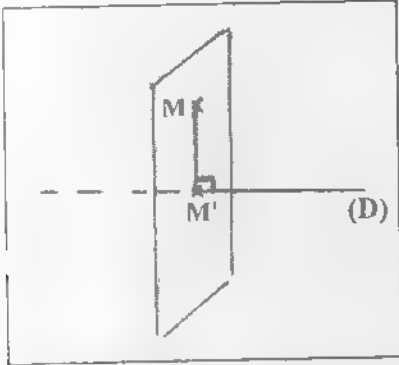
### التعامد في الفضاء :

(P) مستوي . M نقطة من الفضاء

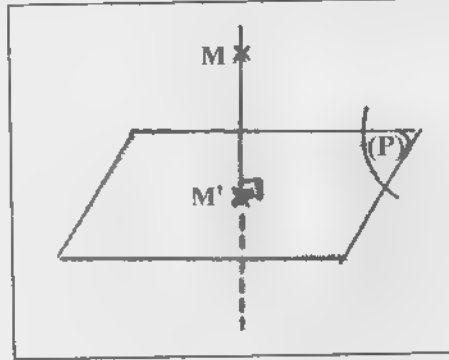
المستقيم العمودي على المستوي (P) و الذي يشمل النقطة M يقطع (P) في نقطة وحيدة M' تسمى المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (P)

(D) مستقيم و M نقطة من الفضاء

المستوي العمودي على (D) و الذي يشمل M يقطع (D) في نقطة وحيدة M' تسمى المسقط العمودي للنقطة M على (D)



المسقط العمودي لنقطة على مستقيم



المسقط العمودي لنقطة على مستوي

### نتائج مباشرة

A و B نقطتان من مستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P)

إذا كان C' هو المسقط العمودي لـ C على (P) فإن  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AC'}$  .  
A و B نقطتان متمايزتان من الفضاء .

C و D نقطتان من الفضاء لا تنتميان إلى المستقيم (AB)

نسمي C' و D' على الترتيب المسقطين العموديين لـ C و D على (AB)

إذن :  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$

مثلاً : في مكعب ABCDEFGH لدينا :

A هي المسقط العمودي لـ E على (AB)

B هي المسقط العمودي لـ F على (AB)

F هي مسقط G على المستوي ABEF

إذن :  $\vec{AB} \cdot \vec{EG} = \vec{AB} \cdot \vec{EF} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2$

تطبيق :

ABCDEFHG مكعب ضلعه a حيث a عدد حقيقي موجب تماماً .

أحسب الجداء السلمي  $\vec{AE} \cdot \vec{HC}$

الحل :

A هي المسقط العمودي لـ C على المستقيم (AE)

E هي المسقط العمودي لـ H على المستقيم (AE)

إذن :  $\vec{AE} \cdot \vec{HC} = \vec{AE} \cdot \vec{EA}$

$$= -\vec{AE} \cdot \vec{AE}$$

$$= -AE^2$$

$$= -a^2$$

تطبيق :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

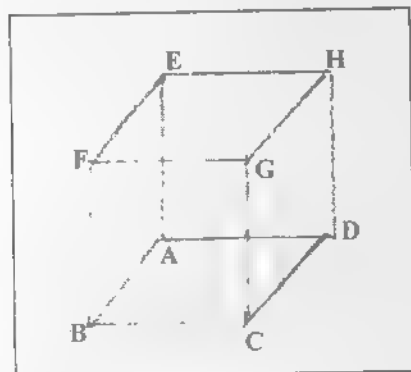
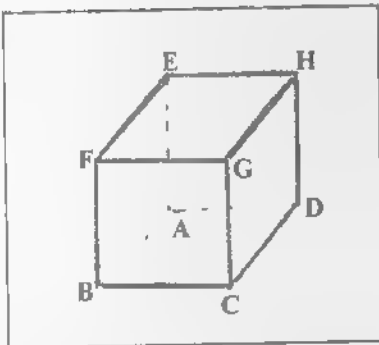
S سطح الكرة التي مركزها (0 ; 1 ; 2) و نصف قطرها  $\sqrt{2}$

S' سطح الكرة التي قطرها [AB] حيث A(1 ; 0 ; -2) : B(0 ; -1 ; 2)

1 - أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة S .

2 - أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة S'

3 - عين العدد الحقيقي a حتى تكون النقطة C(a ; 1 ; 0) نقطة من S'



الحل :

1 - معادلة السطح S :

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4 + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \quad \text{و هي معادلة السطح S .}$$

2 - معادلة السطح S' :

$$\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z+2 \end{pmatrix} \quad \text{لنكن نقطة من الفضاء } M(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \quad \text{يكافئ } M \in S'$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$x(x-1) + y(y+1) + (z+2)(z-2) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 4 = 0 \quad \text{و هي معادلة السطح S'}$$

3 - تكون C نقطة من السطح S' إذا وفقط إذا كانت إحداثياتها تحقق معادلة السطح S'

$$a^2 + (1)^2 + (0)^2 - a + 1 - 4 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \quad \text{معادلة من الدرجة (2) :}$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{cases} a = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a' = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

نتيجة : توجد قيمتين لـ a تجعل النقطة C تنتمي إلى السطح S' و هما a=2 أو a=-1

المعادلة الديكارتية لمستوى في الفضاء

تعريف : كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين مستقلين خطيا من مستوى (P) هو شعاع عمودي على المستوى (P)

ملاحظة : إذا كان  $\vec{n}$  شعاعا ناظما (عموديا) على مستوى (P) فإن  $\vec{n}$  عمودي على كل أشعة المستوى (P) و عليه فكل مستقيم

له  $\vec{n}$  كشعاع توجيه هو مستقيم عمودي على المستوى (P)

تعريف مستوى بنقطة منه و شعاع ناظم غير معدوم

شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء .

مجموعة السطح M من الفضاء حيث  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$  هي المستوى (P) الذي يشمل النقطة A و  $\vec{u}$  شعاع ناظم له

حث عن معادلة المستوى (P)

$$M(x; y; z) \quad \text{و} \quad A(a; b; c) \quad \text{و} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha a - \beta b - \gamma c = 0 \quad \text{يكافئ}$$

و  $\vec{u}$  شعاع ناظم له .

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + c = 0 \quad \text{له معادلة ديكارتية من الشكل} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{في مستوى ذات الشعاع الناظم}$$

c عدد حقيقي .

حصة . (o;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ;  $\vec{k}$ ) معلم في الفضاء

$$z=0 \quad \text{له المعادلة} \quad (o; \vec{i}; \vec{j})$$

$$y=0 \quad \text{له المعادلة} \quad (o; \vec{i}; \vec{k})$$

$$x=0 \quad \text{له المعادلة} \quad (o; \vec{j}; \vec{k})$$

و (P') مستويان معادلاتهما على الترتيب :  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda = 0$  و  $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$

$$1 - \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)}$$

$$2 - \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ هو شعاع ناظمي للمستوي (P')}$$

$$3 - (P) // (P') \text{ يكافئ: يوجد عدد حقيقي غير معدوم } k \text{ حيث } \vec{u} = k \vec{v}$$

$$\text{مع } k \in \mathbb{R}^* \text{ يكافئ: } \begin{cases} \alpha = k a \\ \beta = k b \\ \gamma = k c \end{cases}$$

$$4 - (p) \perp (p') \text{ يكافئ } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{يكافئ } \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

تطبيق :

في معلم متعامد و متجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  من الفضاء نعتبر النقط  $A(-2; 0; 1)$  ،  $B(1; 0; -3)$  و  $C(1; -1; 2)$

1 - بين أن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  تعين مستويا

2 - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$

3 - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  الذي يشمل  $A$  و  $\vec{BC}$  شعاع ناظمي له .

الحل :

$$1 - \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ منه } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1+2 \\ 0-0 \\ -3-1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ منه } \vec{AC} \begin{pmatrix} 1+2 \\ -1-0 \\ 2-1 \end{pmatrix}$$

بما أن :  $3/3 \neq 0/-1$  فإن الشعاعان  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا .

إذن : النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  تعين مستويا .

2 - لتعيين معادلة المستوي  $(ABC)$  نبحث عن شعاع ناظم له .

$$\text{ليكن } \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .}$$

$$\text{إذن : } \vec{u} \perp \vec{AC} \text{ و } \vec{u} \perp \vec{AB}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 3\alpha + \beta(0) - 4\gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\text{ليكن } \alpha = 1 \text{ إذن : } \begin{cases} 3 - 4\gamma = 0 \\ 3 - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} \gamma = 3/4 \\ \beta = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 15/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \text{ نتيجة :}$$

إذن :  $4\vec{u}$  أيضا هو شعاع ناظم للمستوي  $(ABC)$  لأن  $4\vec{u} // \vec{u}$

$$\text{إذن : يمكن أن نأخذ } \vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

إذن : المستوي  $(ABC)$  يشمل  $A$  و  $\vec{u}$  شعاع ناظم له



منه :  $M \in (ABC)$  يكافئ  $\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0$  حيث  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء

$$4(x+2) + 15(y-0) + 3(z-1) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$4x + 15y + 3z + 5 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

3 — معادلة المستوي (P) الذي يشمل A و BC شعاع ناظمي له .

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{إن :} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-0 \\ 2+3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{AM} = 0 \quad \text{يكافئ} \quad M \in (P)$$

$$0(x+2) - 1(y-0) + 5(z-1) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$-y + 5z - 5 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$y - 5z + 5 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

بعد نقطة عن مستوي

في معلم متعامد ومتجانس نعتبر (P) المستوي الذي معادلته  $ax + by + cz + d = 0$  حيث  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  .  
لتكن نقطة من الفضاء  $A(x_A; y_A; z_A)$

$$\frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{هو العدد الحقيقي الموجب}$$

المرجح : لتكن الجملة  $\{(A_1; \alpha_1); (A_2; \alpha_2); \dots; (A_n; \alpha_n)\}$  حيث  $A_i$  نقط متمايضة من الفضاء و  $\alpha_i$  أعداد حقيقية .

إذا كان  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$  فإن توجد نقطة وحيدة G من الفضاء تحقق :

$$\alpha_1 \vec{GA_1} + \alpha_2 \vec{GA_2} + \dots + \alpha_n \vec{GA_n} = \vec{0}$$

$$\{(A_1; \alpha_1); (A_2; \alpha_2); \dots; (A_n; \alpha_n)\}$$

ملاحظة : إذا كانت كل المعاملات  $\alpha_i$  متساوية فإن G تسمى مركز ثقل الجملة  
مبرهنة :

من أجل كل نقطة M من الفضاء ، إذا كانت G مرجح الجملة  $\{(A_1; \alpha_1); (A_2; \alpha_2); \dots; (A_n; \alpha_n)\}$

$$\alpha_1 \vec{MA_1} + \alpha_2 \vec{MA_2} + \dots + \alpha_n \vec{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \vec{MG}$$

مثال : A ، B ، C نقط من الفضاء

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3 \quad \text{من الفضاء حيث}$$

الحل : لتكن G مركز ثقل المثلث ABC

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3 \vec{MG} \quad \text{إن :}$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3 \quad \text{يكافئ} \quad \|\vec{MG}\| = 1$$

$$3 \|\vec{MG}\| = 3 \quad \text{يكافئ}$$

$$\|\vec{MG}\| = 1 \quad \text{يكافئ}$$

إن : M تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

## تمارين الكتاب المدرسي

## التمرين 1

ABCDEFGH مكعب ضلعه  $a$ . أحسب ما يلي :

$$\vec{AB} \cdot \vec{FG} = 5$$

$$\vec{ED} \cdot \vec{EC} = -6$$

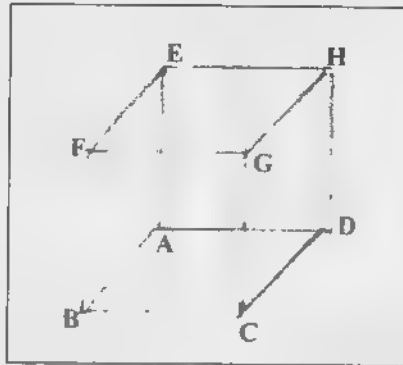
$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -3$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{HF} = -4$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{GC} = -2$$

## الحل 1



- 1 -  $\left. \begin{array}{l} \text{مسطق A على (AB) هو A} \\ \text{مسطق C على (AB) هو B} \end{array} \right\}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2 = a^2 \quad \text{إذن :}$$

- 2 -  $\left. \begin{array}{l} \text{مسطق B على (GC) هو C} \\ \text{مسطق D على (GC) هو C} \end{array} \right\}$

$$\vec{DB} \cdot \vec{GC} = \vec{CC} \cdot \vec{GC} = 0 \quad \text{إذن :}$$

- 3 -  $\left. \begin{array}{l} \text{مسطق C على (AB) هو B} \\ \text{مسطق D على (AB) هو A} \end{array} \right\}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{BA} = -\vec{AB} \cdot \vec{AB} = -AB^2 = -a^2 \quad \text{إذن :}$$

- 4 -  $\left. \begin{array}{l} \text{مسطق H على (DB) هو D} \\ \text{مسطق F على (DB) هو B} \end{array} \right\}$

$$\vec{DB} \cdot \vec{HF} = \vec{DB} \cdot \vec{DB} = DB^2 = 2a^2 \quad \text{إذن : (لأن } DB^2 = AB^2 + AD^2 = 2a^2 \text{)}$$

- 5 -  $\left. \begin{array}{l} \text{مسطق F على (AB) هو B} \\ \text{مسطق G على (AB) هو B} \end{array} \right\}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{FG} = \vec{AB} \cdot \vec{BB} = 0 \quad \text{إذن :}$$

- 6 - مسقط C على (ED) هي D

$$\vec{ED} \cdot \vec{EC} = \vec{ED} \cdot \vec{ED} = ED^2 = 2a^2 \quad \text{إذن :}$$

## التمرين 2

ABCDEFGH مكعب .

$$1 - \text{أحسب } \vec{AG} \cdot \vec{BE} \text{ ثم } \vec{AG} \cdot \vec{BD}$$

2 - استنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوى (BED)

## الحل 2

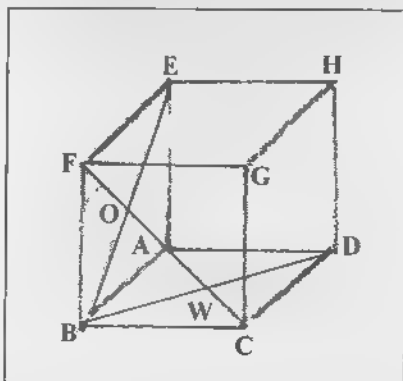
1 - ليكن O مركز الوجه ABFE

- $\left. \begin{array}{l} \text{O هو مسقط A على (BE)} \\ \text{O هو مسقط G على (BE)} \end{array} \right\}$

$$\vec{AG} \cdot \vec{BE} = \vec{OO} \cdot \vec{BE} = 0 \quad \text{إذن :}$$

ليكن W مركز الوجه ABCD

- $\left. \begin{array}{l} \text{W هو مسقط A على (BD)} \\ \text{W هو مسقط G على (BD)} \end{array} \right\}$



$$\vec{AG} \cdot \vec{BD} = \vec{ww} \cdot \vec{BD} = 0 \quad \text{إذن :}$$

2 - الأشعة  $\vec{BD}$  و  $\vec{BE}$  ليست مرتبطة خطيا و تنتمي إلى المستوى BED

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AG} \perp \vec{BD} \\ \vec{AG} \perp \vec{BE} \end{array} \right\} \text{ فإن } \left. \begin{array}{l} \vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0 \\ \vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0 \end{array} \right\} \text{ بما أن}$$

إذن :  $\vec{AG}$  عمودي على المستوى (BDE)  
منه : المستقيم (AG) عمودي على المستوى (BED)

التمرين - 3

ABCDEFGH مكعب .

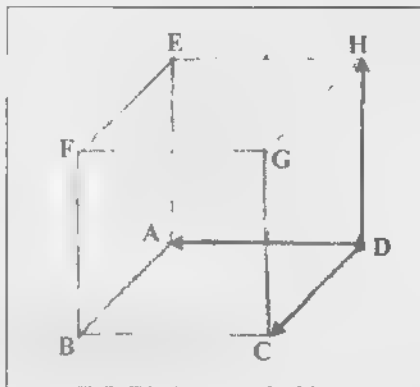
نعتبر المعلم  $(D ; \vec{DA} ; \vec{DC} ; \vec{DH})$

عين إحداثيات النقط A ، B ، E ، D ، G (AG) عمودي على المستوى (BED)

الحل - 3

في المعلم  $(D ; \vec{DA} ; \vec{DC} ; \vec{DH})$  لدينا إحداثيات النقط كما يلي :

$$D(0 ; 0 ; 0) ; E(1 ; 0 ; 1) ; B(1 ; 1 ; 0) ; G(0 ; 1 ; 1) ; A(1 ; 0 ; 0)$$



$$\vec{AG} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{اي} \quad \vec{AG} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} \quad \text{منه :}$$

$$\vec{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{اي} \quad \vec{BD} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{اي} \quad \vec{BE} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

نتائج : (أ)  $\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$  إذن :  $\vec{BD}$  و  $\vec{BE}$  ليس مرتبطين خطيا .

$$\vec{AG} \perp \vec{BE} : \text{ إذن } \vec{AG} \cdot \vec{BE} = -1(0) + 1(-1) + 1(1) = 0 \quad \text{ب)}$$

$$\vec{AG} \perp \vec{BD} : \text{ إذن } \vec{AG} \cdot \vec{BD} = -1(-1) + 1(-1) + 1(0) = 0 \quad \text{ج)}$$

من أ ، ب ، ج نستنتج أن  $\vec{AG}$  عمودي على المستوى (BDE)

أي المستقيم (AG) عمودي على المستوى (BED)

التمرين - 4

لفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

تكن النقط  $C(-1 ; 2 ; -3) ; B(4 ; -2 ; 3) ; A(0 ; -1 ; 1)$

$$1 - \text{أحسب } \vec{CA} \cdot \vec{CB} ; \vec{BA} \cdot \vec{BC} ; \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

2 - عين قيمة مقربة إلى 0,1 درجة مئوية لأقياس الزوايا  $\widehat{ACB} ; \widehat{ABC} ; \widehat{BAC}$

الحل - 4

$$1 - \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} : \text{ إذن } \vec{AB} \begin{pmatrix} 4-0 \\ -2+1 \\ 3-1 \end{pmatrix} \quad \text{منه :} \quad AB = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} : \text{ إذن } \vec{BC} \begin{pmatrix} -1-4 \\ 2+2 \\ -3-3 \end{pmatrix} \quad \text{منه :} \quad BC = \sqrt{25 + 16 + 36} = \sqrt{77}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} : \text{ إذن } \vec{AC} \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2+1 \\ -3-1 \end{pmatrix} \quad \text{منه :} \quad AC = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4(-1) - 1(3) + 2(-4) = -4 - 3 - 8 = -15$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -[4(-5) - 1(4) + 2(-6)] = -(-36) = 36$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-\vec{AC}) \cdot (-\vec{BC}) = \vec{AC} \cdot \vec{BC} = -1(-5) + 3(4) - 4(-6) = 41$$

نتائج : باستعمال تعريف الجداء السلمي حيث  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{-15}{\sqrt{21} \times \sqrt{26}} \quad \text{أي} \\ \widehat{BAC} \approx 130^\circ \quad \text{منه :}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\|} \quad \text{منه} \quad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos \widehat{ABC}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{36}{\sqrt{21} \times \sqrt{77}} \quad \text{أي} \\ \widehat{ABC} \approx 26,45^\circ \quad \text{منه :}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\| \times \|\vec{CB}\|} \quad \text{منه} \quad \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \|\vec{CA}\| \times \|\vec{CB}\| \times \cos \widehat{ACB}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{41}{\sqrt{21} \times \sqrt{77}} \approx 0,91632982 \\ \widehat{ACB} \approx 24^\circ \quad \text{منه}$$

#### التمرين 5

ليكن ABCD رباعي وجوه منتظم في الفضاء رأسه A حيث  $AB = BC = CD = AC = AD = BD = a$

1 - عين طبيعة وجوه الرباعي المنتظم ABCD

2 - أحسب بدلالة a كل من  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$  و  $\vec{BA} \cdot \vec{BD}$

3 - استنتج قيمة  $\vec{BA} \cdot \vec{CD}$

4 - ماذا تستنتج بالنسبة للأحرف المتقابلة من الرباعي ABCD ؟

ليكن H المسقط العمودي لـ A على المستوى (BCD)

5 - أحسب  $\vec{BH} \cdot \vec{CD}$  (يمكن وضع  $\vec{BH} = \vec{BA} + \vec{AH}$ )

6 - أحسب AH بدلالة a

7 - أحسب حجم الهرم ABCD بدلالة a

#### الحل - 5

1 - بما أن كل أحرف الرباعي ABCD متقايسة فإن كل وجه من الأوجه الأربعة هو مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه a كما هو موضح في الشكل (أنظر الشكل)

2 - المستوى الذي يشمل A و يعامد المستقيم (BD) يقطع (BD) في منتصف القطعة [BD] و لتكن A'

منه : A' هي المسقط العمودي لـ A على (BD).

$$\vec{BA} \cdot \vec{BD} = \vec{BA'} \cdot \vec{BD} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{BD} \cdot \vec{BD}$$

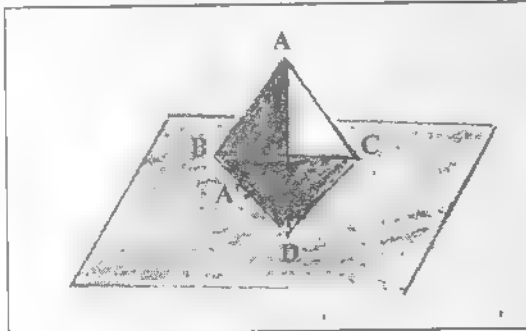
$$= \frac{1}{2} BD^2$$

$$= \frac{1}{2} a^2$$

المستوي الذي يشمل A و يعامد (BC) يقطع (BC) في منتصف القطعة [BC] و لتكن A''

إذن : A'' هي مسقط A على [BC]

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BA''} \cdot \vec{BC} \quad \text{منه :}$$



$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2} BC^2$$

$$= \frac{1}{2} a^2$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{BA}(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

— 3

$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD} : \text{إذن } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \quad \text{— 4}$$

بنفس الطريقة نستنتج أن الأضلاع المتقابلة من الرباعي ABCD متعامدة متتالي متتالي .  
 — 5 H هو المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (BCD) إذن : H هي مركز ثقل المثلث BCD (لأنه متساوي

$$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{0} \quad \text{منه :}$$

B تنتمي إلى محور القطعة [CD] إذن : مسقط B على (CD) هو w حيث w منتصف [CD]  
 لكن H تنتمي إلى محور [CD] إذن : مسقط H على (CD) هو w

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ww} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \quad \text{نتيجة :}$$

— 6 في المثلث القائم HAC لدينا :  
 أي

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$

$$AH^2 = AC^2 - HC^2$$

$$AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} \quad \text{منه :} \quad (1) \dots\dots\dots$$

في المثلث القائم HCW لدينا :  $\angle HCW = \frac{\pi}{6}$  لأن (CH) منتصف الزاوية [CB ; CD]

$$HC = \frac{1}{\sqrt{3}} a \quad \text{منه :} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2 HC} \quad \text{أي } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{CW}{HC}$$

$$AH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} a\right)^2} \quad \text{بالتعويض في (1) نحصل على :}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{1}{3} a^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} a^2}$$

$$= a \sqrt{\frac{2}{3}}$$

7 — حجم الهرم V هو ثلث جداء الإرتفاع H في مساحة القاعدة BCD

لتكن S مساحة القاعدة BCD

$$S = \frac{WB \times CD}{2} \quad \text{إذن :}$$

لنبحث عن WB :

في المثلث القائم WBC :

$$WC^2 + WB^2 = CB^2$$

$$WB^2 = CB^2 - WC^2$$

$$WB^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2} a\right)^2$$

$$WB^2 = a^2 - \frac{1}{4} a^2$$

أي :

أي :

أي :

$$WB^2 = \frac{3}{4} a^2 \quad \text{أي :}$$

$$WB = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad \text{أي :}$$

$$S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a \times a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \text{إذن :}$$

$$V = \frac{1}{3} AH \times S = \frac{1}{3} \times a \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \text{منه :}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \quad \text{أي :}$$

#### التمرين 6 -

ABCD رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a .

1 ، J ، K منتصفات [BC] ، [BD] و [AC] على الترتيب . أحسب ما يلي :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AK} = -3 \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = -2$$

#### الحل - 6

1 - B تنتمي إلى محور [AC] إذن مسقط B على (AC) هي K منتصف [AC]

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2} AC^2$$

$$= \frac{1}{2} a^2$$

2 - الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{IK}$  متوازيان و متعاكسان في الاتجاه .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = -AB \cdot IK \quad \text{إذن :}$$

$$= -a \times \frac{a}{2} = -\frac{1}{2} a^2$$

3 - المستوي الذي يشمل D و يعامد (AK) يقطع (AK) في K إذن : K هو المسقط العمودي لـ D على (AK) منه :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AK} = AK^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} a^2$$

#### التمرين 7 -

ABC مثلث قائم في C . H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

$$CH = h ; BC = a ; AC = b$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad \text{بين أن}$$

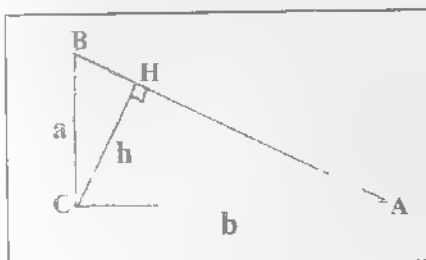
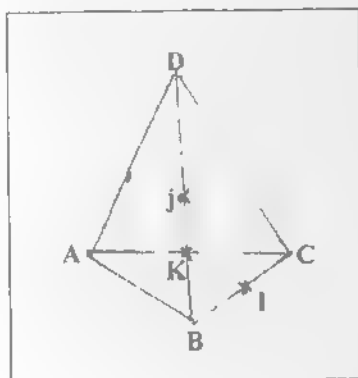
#### الحل - 7

لتكن S مساحة المثلث ABC

$$S = \frac{1}{2} AC \times CB = \frac{1}{2} a b \quad \text{فإن } \angle ACB = \frac{\pi}{2} \text{ بما أن}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{h}{2} \times AB \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$AB = \frac{a b}{h} \quad \text{إذن : } \frac{1}{2} a b = \frac{h}{2} AB \quad \text{منه :}$$



في المثلث القائم CAB لدينا :  $AC^2 + CB^2 = AB^2$

$$b^2 + a^2 = AB^2 \quad \text{أي :}$$

$$b^2 + a^2 = \left(\frac{ab}{h}\right)^2 \quad \text{أي :}$$

$$b^2 + a^2 = \frac{a^2 b^2}{h^2} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{h^2} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{b^2}{a^2 b^2} + \frac{a^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{h^2} \quad \text{منه :}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2} \quad \text{أي : وهو المطلوب}$$

### التمرين - 8

SABCD هرم قاعدته المربع ABCD الذي مركزه O و ضلعه a

h هو طول الارتفاع OS

1- أحسب بدلالة a و h الجداءات السلمية التالية :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} \quad ; \quad \vec{AO} \cdot \vec{AS} \quad ; \quad \vec{SB} \cdot \vec{SD}$$

2- أحسب V حجم الهرم

3- كيف يمكن إختيار h حتى يكون (SB) و (SD) متعامدين . ما هي قيمة V المرافقة ؟

4- لتكن النقط  $A\left(\frac{7}{2}; \frac{15}{2}; -\frac{3}{2}\right)$  ;  $B(2; -1; 0; \frac{1}{2})$  ;  $C(-2; -\frac{5}{2}; -15)$  ;  $D(-\frac{25}{2}; 0; -1)$

بين أن الرباعي الوجوه ABCD منتظم ثم أحسب حجمه v

### الحل - 8

$$1- \vec{OA} \perp \vec{OB} \quad \text{إذن :} \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

O هو المسقط العمودي لـ S على (AO)

$$\vec{AO} \cdot \vec{AS} = \vec{AO} \cdot \vec{AO} = AO^2 \quad \text{إذن :}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{حسب فيثاغورث :}$$

$$AC^2 = 2a^2 \quad \text{أي :}$$

$$AC = a\sqrt{2} \quad \text{منه :}$$

$$AO = \frac{AC}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$AO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad \text{منه :}$$

$$\vec{AO} \cdot \vec{AS} = \frac{1}{2}a^2 \quad \text{نتيجة :}$$

$$\vec{SB} \cdot \vec{SD} = (\vec{SO} + \vec{OB}) \cdot \vec{SD}$$

$$= \vec{SO} \cdot \vec{SD} + \vec{OB} \cdot \vec{SD}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مسقط O على (SD) هي D} \\ \text{مسقط S على (OB) هي O} \end{array} \right\} \text{لأن} \quad = \vec{SD} \cdot \vec{SD} + \vec{OB} \cdot \vec{OD}$$

$$= SD^2 - \vec{BO} \cdot \vec{OD}$$

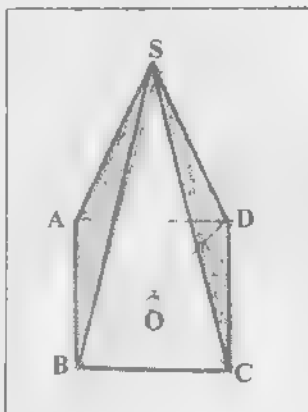
$$= SD^2 - \vec{BO} \cdot \vec{BO} \quad \text{لأن O منتصف [BD]}$$

$$= SD^2 - BO^2$$

$$OS^2 + OD^2 = SD^2 \quad \text{في المثلث القائم SOD لدينا :}$$

$$\vec{SB} \cdot \vec{SD} = OS^2 + OD^2 - BO^2 \quad \text{منه :}$$

$$OD = BO \quad \text{أي : لأن} \quad \vec{SB} \cdot \vec{SD} = OS^2$$



$$\vec{SB} \cdot \vec{SD} = h^2 \quad \text{أي :} \quad V = \frac{1}{3} Sh^3 \quad \text{حيث } S \text{ هي مساحة القاعدة } ABCD \quad - 2$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 h^3 \quad \text{منه :}$$

$$3 - \text{يكون (SB) و (SD) متعامدان إذا و فقط إذا كان : } SD^2 + SB^2 = BD^2 \quad \text{(I) .....}$$

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 = 2a^2 \quad \text{لأن : (1) .....}$$

$$SD^2 = OS^2 + OD^2 = h^2 + \frac{1}{2} a^2 \quad \text{لأن : (2) ..... } SD^2 = SB^2 = h^2 + \frac{1}{2} a^2$$

$$2(h^2 + \frac{1}{2} a^2) = 2a^2 \quad \text{منه : العلاقة (I) تصبح :}$$

$$2h^2 + a^2 = 2a^2 \quad \text{أي :}$$

$$2h^2 = a^2 \quad \text{أي :}$$

$$h^2 = \frac{a^2}{2} \quad \text{أي :}$$

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{منه : و هو المطلوب}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \times \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{a^5}{6\sqrt{2}} \quad \text{في هذه الحالة :}$$

$$AB = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1225}{4} + 4} = \sqrt{\frac{1250}{4}} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -3/2 \\ -35/2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 - \frac{7}{2} \\ -10 - \frac{15}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad - 4$$

$$AC = \sqrt{\frac{121}{4} + 100 + \frac{729}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}} \quad \text{منه} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -11/2 \\ -10 \\ -27/2 \end{pmatrix} \quad \text{إنه} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 - \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} - \frac{15}{2} \\ -15 + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$BC = \sqrt{16 + \frac{225}{4} + \frac{961}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}} \quad \text{منه} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 15/2 \\ -31/2 \end{pmatrix} \quad \text{إنه} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} -2 - 2 \\ -\frac{5}{2} + 10 \\ -15 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$DA = \sqrt{256 + \frac{225}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}} \quad \text{إنه :} \quad \vec{DA} \begin{pmatrix} 16 \\ 15/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{DA} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} + \frac{25}{2} \\ \frac{15}{2} - 0 \\ -\frac{3}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

$$BD = \sqrt{\frac{841}{4} + 100 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}} \quad \text{إنه :} \quad \vec{DB} \begin{pmatrix} 29/2 \\ -10 \\ 3/2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{DB} \begin{pmatrix} 2 + \frac{25}{2} \\ -10 - 0 \\ \frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix}$$



$$DC = \sqrt{\frac{441}{4} + \frac{25}{4} + 196} = \sqrt{\frac{1250}{4}} \quad \text{إذن} \quad \vec{DC} = \begin{pmatrix} 21/2 \\ -5/2 \\ -14 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{DC} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{25}{2} \\ -\frac{5}{2} - 0 \\ -15 + 1 \end{pmatrix}$$

نتيجة : D لا تنتمي إلى المستوي ABC و  $AB = AC = AD = BC = DB = DC$

إذن : الرباعي الوجوه ABCD منتظم

منه : مسقط النقطة D على المستوي ABC هي مركز ثقل المثلث ABC

إذن : إرتفاعه هو  $\alpha \sqrt{\frac{3}{2}}$  حيث  $\alpha$  هو طول الضلع .

في هذه الحالة  $\alpha = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$$h = \sqrt{\frac{1250}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{625}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن : الارتفاع هو :}$$

$$S = \frac{1}{2} \alpha h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1250}{4}} \times \frac{25\sqrt{3}}{2} \quad \text{منه : مساحة القاعدة :}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{\sqrt{2}} \times \frac{25\sqrt{3}}{2} \\ = \frac{625\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{1}{3} Sh^3 = \frac{1}{3} \times \frac{625\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \times \left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad \text{إذن :} \\ = \frac{625 \times \sqrt{3} \times (25)^3 \times 9\sqrt{3}}{3 \times 4 \times \sqrt{2} \times 4\sqrt{2}} \\ = \frac{625 \times 25^3 \times 9}{32} \approx 2746582,031$$

## التمرين 2

الفضاء منسوب إلى معام متعامد و متجانس . نعتبر النقط  $C(2; 0; 3) ; B(0; 1; 0) ; A(-1; 1; 2)$

- 1 - احسب  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} ; \vec{BA} \cdot \vec{BC} ; \vec{CA} \cdot \vec{CB}$  و  $\angle ACB ; \angle ABC ; \angle BAC$
- 2 - عين قيمة مقربة إلى 0,1 درجة لقياس الزوايا

## الحل 2

لنبحث أولا عن مركبات الأشعة  $\vec{AB} ; \vec{AC} ; \vec{BC}$  كمايلي :

$$AB = \sqrt{1 + 0 + 4} = \sqrt{5} \quad \text{إذن} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 1-1 \\ 0-2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11} \quad \text{إذن} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 0-1 \\ 3-2 \end{pmatrix}$$

$$BC = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \quad \text{إذن} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \\ 3-0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1(3) + 0(-1) - 2(1) = 1$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -[1(2) + 0(-1) - 2(3)] = 4$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-\vec{AC}) \cdot (-\vec{BC}) = \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 3(2) - 1(-1) + 1(3) = 10$$

2 - باستعمال تعريف الجداء السلمي لدينا ما يلي :

$$\cos \hat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{BAC}$$

$$\cos \hat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{11}} \quad \text{أي}$$

$$\cos \hat{BAC} = 0,134839 \quad \text{أي}$$

$$\hat{BAC} \approx 82,25^\circ \quad \text{منه :}$$

$$\cos \hat{ABC} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BA \cdot BC} \quad \text{منه} \quad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA \times BC \times \cos \hat{ABC}$$

$$\cos \hat{ABC} = \frac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{14}} \quad \text{أي}$$

$$\cos \hat{ABC} = 0,47809 \quad \text{أي}$$

$$\hat{ABC} \approx 61,43^\circ \quad \text{منه :}$$

$$\cos \hat{ACB} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{CA \cdot CB} \quad \text{منه} \quad \vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \times CB \times \cos \hat{ACB}$$

$$\cos \hat{ACB} = \frac{10}{\sqrt{11} \times \sqrt{14}} \quad \text{أي}$$

$$\cos \hat{ACB} = 0,8058 \quad \text{أي}$$

$$\hat{ACB} \approx 36,31^\circ \quad \text{منه :}$$

تحقيق : مجموع أقياس زوايا مثلث هو  $180^\circ$

$$\hat{BAC} + \hat{ABC} + \hat{ACB} = 82,25^\circ + 61,43^\circ + 36,31^\circ \approx 179,99^\circ \quad \text{لدينا}$$

#### التمرين 10 -

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  عين مركبات أشعة ناظمية لكل من المستويات التالية :

$$x + y - z = 0 \quad : (P_1)$$

$$3y - z = 0 \quad : (P_4)$$

$$x - 2y = 0 \quad : (P_2)$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z + 3 = 0 \quad : (P_3)$$

#### الحل - 10

كل مستوى ذات المعادلة  $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$  له شعاع ناظمي  $\vec{u}$  حيث  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  منه النتائج التالية :

$$(P_1) \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{شعاع ناظمي للمستوي}$$

$$(P_2) \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{شعاع ناظمي للمستوي}$$

$$(P_3) \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} \quad \text{شعاع ناظمي للمستوي}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P_4).$$

التمرين 11

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .  
أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) الذي يشمل A(1 ; -4 ; 3) و  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  شعاع ناظمي له .

الحل 11

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \\ z-3 \end{pmatrix} \text{ لنكن } M(x ; y ; z) \text{ نقطة من الفضاء . إذن :}$$

$$\vec{u} \perp \vec{AM} \text{ يكافئ } M \in (P)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0 \text{ يكافئ}$$

$$1(x-1) + 0(y+4) - 2(z-3) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$x - 1 - 2z + 6 = 0 \text{ يكافئ}$$

$$x - 2z + 5 = 0 \text{ يكافئ (P) هي معادلة المستوي (P)}$$

التمرين 12

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .  
أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي ذو المعادلة  $-x + 2y + z - 3 = 0$  والذي يشمل النقطة A(-1 ; 2 ; -3)

الحل 12

المستوي ذو المعادلة  $-x + 2y + z - 3 = 0$  له شعاع ناظمي  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z+3 \end{pmatrix} \text{ لنكن } M(x ; y ; z) \text{ نقطة من الفضاء إذن :}$$

$$\vec{u} \perp \vec{AM} \text{ يكافئ } M \in (P)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0 \text{ يكافئ}$$

$$-1(x+1) + 2(y-2) + 1(z+3) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$-x + 2y + z - 2 = 0 \text{ يكافئ (P) هي معادلة المستوي (P)}$$

ملاحظة : يمكن البحث عن معادلة المستوي (P) بطريقة أخرى كمايلي :

(P) يوازي المستوي ذو المعادلة  $-x + 2y + z - 3 = 0$  إذن : (P) له معادلة من الشكل :

$$-x + 2y + z + \alpha = 0 \text{ حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي ثابت}$$

بما أن A تنتمي إلى (P) فإن إحداثياتها تحقق معادلة المستوي (P)

$$\text{أي : } 0 = (-1) + 2(2) + (-3) + \alpha \text{ منه } \alpha + 2 = 0 \text{ أي } \alpha = -2$$

نتيجة : معادلة (P) هي :  $-x + 2y + z - 2 = 0$

في كل التمارين التابعة الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

التمرين 13

إليك المعادلات الديكرتية لأربع مستويات :

$$(P_1) : -x + 2y + z - 3 = 0 \quad (P_2) : x - 2y + z + 3 = 0$$

$$(P_3) : x - 2y - z = 0 \quad (P_4) : 2x + 3y - 4z + 2 = 0$$

المطلوب : أذكر المستويات المتوازية والمتعامدة .

الحل 13

لنبحث عن  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$  الأشعة الناعمية على الترتيب للمستويات  $(P_1), (P_2), (P_3), (P_4)$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -1 - 4 + 1 = -4 \text{ إذن : } (P_1) \text{ و } (P_2) \text{ ليسا متعامدان .}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = -1 - 4 - 1 = -6 \text{ إذن : } (P_1) \text{ و } (P_3) \text{ ليسا متعامدان .}$$

- متعامدان .  $(P_4)$  و  $(P_1)$  : إذن  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_4 = -2 + 6 - 4 = 0$   
 ليسا متعامدان .  $(P_3)$  و  $(P_2)$  : إذن  $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 1 + 4 - 1 - 4 = 0$   
 ليسا متعامدان .  $(P_4)$  و  $(P_2)$  : إذن  $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_4 = 2 - 6 - 4 = -8$   
 متعامدان .  $(P_4)$  و  $(P_3)$  : إذن  $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_4 = 2 - 6 + 4 = 0$

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} : \text{إذن} \quad -\vec{u}_1 = \vec{u}_3 : \text{منه} \quad \vec{u}_1 // \vec{u}_3$$

منه : المستويان  $(P_1)$  و  $(P_3)$  متوازيان .

#### التمرين 14

$(P)$  مستوي معادلته  $-5x + y - z - 6 = 0$

A نقطة من الفضاء إحداثياتها  $A(-6; 2; -1)$

بين أن النقطة  $B(-1; 1; 0)$  هي المسقط العمودي للنقطة A على  $(P)$

#### الحل 14

يمكن الإجابة على هذا السؤال بطريقتين مختلفتين كما يلي :

- الطريقة (1) يكفي أن نثبت أن :  $\left. \begin{array}{l} B \in (P) \\ \vec{AB} \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P) \end{array} \right\}$  ..... (1)  
 (2) ..... (P) شعاع ناظمي للمستوي

$$(1) \text{ هل } B \in (P) \text{ ؟ } -5(-1) + 1 - 0 - 6 = 5 + 1 - 6 = 0$$

إذن : فعلا  $B \in (P)$

$$(2) \text{ هل } \vec{AB} \text{ شعاع ناظمي لـ } (P) \text{ ؟}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -1+6 \\ 1-2 \\ 0+1 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{شعاع ناظمي للمستوي } (P) \quad \text{فإن } \vec{AB} - \vec{u} \text{ شعاع ناظمي لـ } (P) \quad \text{بما أن}$$

و عليه فإن  $\vec{AB}$  شعاع ناظمي لـ  $(P)$  أيضا .

نتيجة : الشرطين (1) و (2) محققين إذن : فعلا B هي المسقط العمودي لـ A على المستوي (P)

الطريقة (2) يكفي أن نثبت أن بعد النقطة A عن B يساوي المسافة بين النقطة A والمستوي (P) و أن  $B \in (P)$  لدينا احداثيات B تحقق معادلة (P) إذن :  $B \in (P)$

$$D = \frac{|-5(-6) + 2 - (-1) - 6|}{\sqrt{25 + 1 + 1}} = \frac{27}{\sqrt{27}} = \sqrt{27} : (P) \text{ و } A \text{ المسافة بين}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{لنحسب } AB :$$

$$AB = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27} \quad \text{إذن :}$$

نتيجة : B هي فعلا المسقط العمودي لـ A على المستوي (P)

#### التمرين 15

لنكن النقط  $A(-1; 1; 1)$  ،  $B(0; 0; -1)$  ،  $C(3; -2; 1)$

1 - بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا .

2 - عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

3 - أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

#### الحل 15

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{إذن :} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0-1 \\ -1-1 \end{pmatrix} \quad -1$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{إذن :} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 3+1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

إذن :  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا .  
منه : النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  تعين مستويا .

2- ليكن  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$  شعاعا ناظميا للمستوي  $(ABC)$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان

إذن :  $\vec{u}$  عمودي على كل أشعة المستوي  $(ABC)$  وخاصة  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{array} \right\} \text{يكافئ} \left. \begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{AB} \\ \vec{u} \perp \vec{AC} \end{array} \right\} \text{منه :}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - a - 2b = 0 \\ 4 - 3a + 0 = 0 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - a = 2b \\ 3a = 4 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{1-a}{2} \\ a = 4/3 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{1 - \frac{4}{3}}{2} = -\frac{1}{6} \\ a = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

نتيجة :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}$  شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$

إذن :  $6\vec{u}$  أيضا شعاع ناظمي أي  $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$  هو شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$

3- لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء

$$\vec{v} \perp \vec{AM} \quad \text{يكافئ} \quad M \in (ABC)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{AM} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$6(x+1) + 8(y-1) - 1(z-1) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$6x + 8y - z - 1 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad \text{هي معادلة المستوي } (ABC)$$

$$A \in (ABC) : \text{إذن } 6(-1) + 8(1) - 1 - 1 = 8 - 8 = 0$$

$$B \in (ABC) : \text{إذن } 6(0) + 8(0) - (-1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$C \in (ABC) : \text{إذن } 6(3) + 8(-2) - (1) - 1 = 18 - 16 - 2 = 0$$

التمرين 16

1- أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة  $(S)$  التي قطرها  $[AB]$  حيث  $A(7; 2; -2)$  و  $B(-3; 0; -4)$

2- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(\pi)$  مماس السطح  $(S)$  في النقطة  $A$

الحل 16

1- مركز سطح الكرة  $(S)$  هو  $w$  حيث  $w$  منتصف  $[AB]$  ونصف قطرها  $\frac{AB}{2}$

$$\text{إذن : } w \left( \frac{7-3}{2} ; \frac{2+0}{2} ; \frac{-2-4}{2} \right) \text{ أي } w(2; 1; -3)$$

$$AB = \sqrt{100 + 4 + 4} = \sqrt{108} \quad \text{منه :} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{أي} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -3-7 \\ 0-2 \\ -4+2 \end{pmatrix}$$

نتيجة : سطح الكرة (S) له المعادلة :  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = \left(\frac{\sqrt{108}}{2}\right)^2$

أي :  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 4 + 1 + 9 = 108/4$

أي :  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 14 = 27$

أي :  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 13 = 0$

2 - المستوي  $(\pi)$  مماس لـ (S) عند النقطة A إذن :

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ يشمل } (\pi) \\ \text{الشعاع } \overrightarrow{WA} \text{ ناظم للمستوي } (\pi) \end{array} \right\}$$

لدينا  $\overrightarrow{WA} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  منه  $\overrightarrow{WA} \begin{pmatrix} 7-2 \\ 2-1 \\ -2+3 \end{pmatrix}$

لتكن نقطة من الفضاء  $M(x; y; z)$ .

$\overrightarrow{WA} \perp \overrightarrow{AM}$  يكافئ  $M \in (\pi)$

$\overrightarrow{WA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$  يكافئ

$5(x-7) + 1(y-2) + 1(z+2) = 0$  يكافئ

$5x + y + z - 35 = 0$  يكافئ وهي معادلة المستوي  $(\pi)$

#### التمرين 17

(S) سطح كرة معادلته  $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$

1 - عين  $w$  مركز السطح (S)

2 - أحسب بعد النقطة  $w$  عن المستوي (P) ذو المعادلة  $4x - 3z - 6 = 0$

3 - هل المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) ؟ علل إجابتك .

#### الحل 17

1 -  $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$  يكافئ  $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$

$(x-0)^2 + (y+1)^2 - 1 + (z-3)^2 - 9 - 15 = 0$  يكافئ

$(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 - 25 = 0$  يكافئ

$(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = (5)^2$  يكافئ

إذن : (S) هو سطح الكرة التي مركزها  $w(0; -1; 3)$  و نصف قطرها 5 .

2 - ليكن D بعد النقطة  $w$  على المستوي (P)

$$D = \frac{|4(0) - 3(-1) - 6|}{\sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

3 - نصف قطر الكرة S أكبر من بعد المركز  $w$  عن المستوي (P) إذن : (P) يقطع السطح (S) .

#### التمرين 18 (بكالوريا)

لتكن النقط  $A(-1; 2; -1)$  ،  $B(-6; 1; 1)$  ،  $C(4; -3; 3)$  ،  $D(-1; -5; -1)$

1 - عين مركبات شعاع ناظمي  $\vec{a}$  للمستوي (BCD)

2 - استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BCD)

3 - عين إحداثيات النقطة H حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD)

4 - أحسب  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$

5 - نسمي ارتفاع رباعي وجوه كل مستقيم يشمل أحد الرؤوس و عمودي على الوجه المقابل .

لتكن النقط  $K(0; 0; 1)$  ،  $J(0; 1; 0)$  ،  $I(1; 0; 0)$

هل ارتفاعات الرباعي OIJK تتلاقى في نقطة واحدة .

#### الحل 18

1 -  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  منه  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4+6 \\ -3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix}$  - 1

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1-4 \\ -5+3 \\ -1-3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ليكن } \vec{v} \text{ شعاع من الفضاء } \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{array} \right\} \text{ يكون } \vec{v} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (BCD) إذا و فقط إذا كان}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10 - 4a + 2b = 0 \\ -5 - 2a - 4b = 0 \end{array} \right\} \text{ يكافئ } \left. \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots\dots 20 - 8a + 4b = 0 \\ (2) \dots\dots\dots -5 - 2a - 4b = 0 \end{array} \right\} \text{ يكافئ}$$

$$\text{بجمع (1) و (2) : } 15 - 10a = 0$$

$$\text{منه : } 10a = 15$$

$$\text{منه : } a = 15/10 \text{ أي } a = 3/2$$

$$\text{بالتعويض في (2) : } 4b = -5 - 2a$$

$$\text{أي : } 4b = -5 - 2(3/2)$$

$$\text{أي : } 4b = -8 \text{ أي } b = -2$$

$$\text{نتيجة : } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ منه } 2\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{نتيجة : يكفي أن نأخذ } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ شعاعا ناظما للمستوي (BCD)}$$

$$2 - \text{معادلة المستوي (BCD) :}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (BCD) إذن : المستوي (BCD) له معادلة ديكارتية من الشكل :}$$

$$2x + 3y - 4z + \alpha = 0 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$B \in (\text{BCD}) \text{ إذن : } 2(-6) + 3(1) - 4(1) + \alpha = 0$$

$$\text{منه : } \alpha = 13$$

$$2x + 3y - 4z + 13 = 0 \text{ هي معادلة المستوي (BCD) نتيجة :}$$

$$3 - \text{لتكن } H(x; y; z) \text{ إحداثيات النقطة H}$$

$$\text{إذن : } \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{تكون H مسقط عمودي لـ A على المستوي (BCD) إذا و فقط إذا كان :}$$

$$(1) \dots\dots\dots \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$(2) \dots\dots\dots \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CD}$$

$$(3) \dots\dots\dots H \in (\text{BCD})$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ يكافئ } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$10(x+1) - 4(y-2) + 2(z+1) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$10x - 4y + 2z + 20 = 0 \text{ يكافئ}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \text{ يكافئ } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CD}$$

$$-5(x+1) - 2(y-2) - 4(z+1) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$-5x - 2y - 4z - 5 = 0 \text{ يكافئ}$$

$$2x + 3y - 4z + 13 = 0 \text{ يكافئ } H \in (\text{BCD})$$

نتيجة : تكون H مسقط عمودي لـ A على (BCD) إذا و فقط إذا كان :

$$(1) \dots\dots 10x - 4y + 2z + 20 = 0$$

$$(2) \dots\dots -5x - 2y - 4z - 5 = 0 \quad \text{نحل هذه الجملة كمايلي :}$$

$$(3) \dots\dots 2x + 3y - 4z + 13 = 0$$

$$(3) \text{ تكافئ } -2x - 3y + 4z - 13 = 0 \dots\dots (4)$$

$$(1) \text{ تكافئ } 20x - 8y + 4z + 40 = 0 \dots\dots (5)$$

$$\text{بجمع (2) و (4) : } -5x - 2y - 4z - 5 - 2x - 3y + 4z - 13 = 0$$

$$\text{أي : } -7x - 5y - 18 = 0 \dots\dots (6)$$

$$\text{بجمع (2) و (5) : } -5x - 2y - 4z - 5 + 20x - 8y + 4z + 40 = 0$$

$$\text{أي : } 15x - 10y + 35 = 0 \dots\dots (7)$$

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} -7x - 5y - 18 = 0 \\ 15x - 10y + 35 = 0 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 14x + 10y + 36 = 0 \\ 15x - 10y + 35 = 0 \end{cases}$$

$$\text{بالجمع : } 29x + 71 = 0 \text{ منه } x = -71/29$$

$$\text{بالتعويض في المعادلة } -7x - 5y - 18 = 0 \text{ لدينا :}$$

$$5y = -7x - 18 = -7\left(-\frac{71}{29}\right) - 18 = \frac{497}{29} - 18 = \frac{-25}{29}$$

$$\text{منه : } y = \frac{-25}{5 \times 29} = \frac{-5}{29}$$

$$\text{بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على :}$$

$$2\left(-\frac{71}{29}\right) + 3\left(\frac{-5}{29}\right) - 4z + 13 = 0$$

$$\text{أي : } -\frac{142}{29} - \frac{15}{29} + 13 = 4z$$

$$\text{أي : } -\frac{157}{29} + 13 = 4z$$

$$\text{أي : } 4z = 220/29$$

$$\text{أي : } z = 55/29$$

$$\text{نتيجة : H لها الاحداثيات } \left(-\frac{71}{29} ; \frac{-5}{29} ; \frac{55}{29}\right)$$

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} 103/29 \\ -34/29 \\ 26/29 \end{pmatrix}$$

منه

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -\frac{71}{29} + 6 \\ \frac{-5}{29} - 1 \\ \frac{55}{29} - 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{103}{29}(-5) - \frac{34}{29}(-2) + \frac{26}{29}(-4) \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{1}{29}(-515 + 68 - 104)$$

$$= -551/29$$

$$= -19$$

5 — المعلم متعامد و متجانس إذن لدينا النتائج التالية :

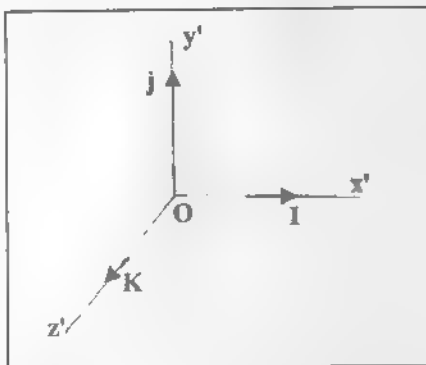
الارتفاع المتعلق بالرأس J هو محور الترتيب (yy')

الارتفاع المتعلق بالرأس I هو محور الفواصل (xx')

الارتفاع المتعلق بالرأس K هو محور الرواقم (zz')

الارتفاع المتعلق بالرأس O هو محور الترتيب

نتيجة : كل الارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة هي المبدأ O





## التمرين - 19

لتكن النقط  $E(1; 2; -2 + \sqrt{2})$  ،  $D(0; 3; -2)$  ،  $B(2; 3; -2)$  ،  $A(1; 2; -2)$

1 - تحقق أن  $AB = AD = AE$

2 - تحقق أن المستقيمات  $(AB)$  ،  $(AD)$  ،  $(AE)$  متعامدة مثنى مثنى .

## الحل - 19

$$AB = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ -2+2 \end{pmatrix} \quad -1$$

$$AD = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-2 \\ -2+2 \end{pmatrix}$$

$$AE = \sqrt{0+0+2} = \sqrt{2} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-2 \\ -2+\sqrt{2}+2 \end{pmatrix}$$

نتيجة :  $AB = AD = AE = \sqrt{2}$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \quad \text{إذن} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -1 + 1 + 0 = 0 \quad -2$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AE} \quad \text{إذن} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE} \quad \text{إذن} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 + 0 + 0 = 0$$

نتيجة :  $(AB)$  ،  $(AD)$  و  $(AE)$  متعامدة مثنى مثنى .

## التمرين - 20

لتكن النقط  $C(-3; 0; 1)$  ،  $B(2; 3; -4)$  ،  $A(1; -1; 0)$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \text{شعاع مركباته}$$

1 - تحقق أن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  ليست على استقامة

2 - أحسب  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}$  و  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}$  ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$

3 - عين معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  الذي يوازي المستوي  $(ABC)$  و يمر من النقطة  $D(-2; 2; -1)$

## الحل - 20

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3+1 \\ -4-0 \end{pmatrix} \quad -1$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3-1 \\ 0+1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

نتيجة :  $\frac{1}{-4} \neq \frac{4}{1}$  إذن :  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا مرتبطين خطيا .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 1(8) + 4(15) - 4(17) = 8 + 60 - 68 = 0 \quad \text{منه : النقط } A , B , C \text{ ليست على استقامة} \quad -2$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = -4(8) + 1(15) + 1(17) = -32 + 32 = 0$$

نتيجة : الشعاع  $\vec{n}$  عمودي على كل من  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$

إذن :  $\vec{n}$  هو شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$  .

لتكن نقطة من الفضاء  $M(x; y; z)$  .

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \quad \text{يكافئ} \quad M \in (ABC)$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$8(x-1) + 15(y+1) + 17(z-0) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$8x + 15y + 17z + 7 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad (ABC)$$

4 - المستوى (P) يوازي المستوى (ABC) إذن : (P) له معادلة من الشكل :

$$8x + 15y + 17z + \alpha = 0 \quad \text{حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي ثابت .}$$

$$8x + 15y + 17z + \alpha = 0 \quad \text{تحقق المعادلة } D \in (P)$$

$$8(-2) + 15(2) + 17(-1) + \alpha = 0 \quad \text{منه :}$$

$$\alpha = 16 - 30 + 17 \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = 3 \quad \text{أي :}$$

$$8x + 15y + 17z + 3 = 0 \quad \text{هي : معادلة المستوى (P) :}$$

التمرين 21

$$C(1; -2; -1) ; B(-3; 4; 2) ; A(-1; 2; 0)$$

1 - بين أن  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير مرتبطين خطيا .

$$2 - \text{بين أن الشعاع } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ يكون ناظمي للمستوي (ABC) إذا و فقط إذا كان } \begin{cases} -2a + 2b + 2c = 0 \\ 2a - 4b - c = 0 \end{cases}$$

3 - استنتج شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) بمركبات صحيحة . ثم أكتب معادلة للمستوي (ABC)

الحل - 21

$$1 - \vec{AB} \begin{pmatrix} -3+1 \\ 4-2 \\ 2-0 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 1+1 \\ -2-2 \\ -1-0 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{نتيجة : } \frac{-2}{2} \neq \frac{2}{-4} \quad \text{إذن : } \vec{AB} \text{ و } \vec{AC} \text{ ليسا مرتبطين خطيا .}$$

$$2 - \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ ناظمي للمستوي (ABC) يكافئ } \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} -2a + 2b + 2c = 0 \\ 2a - 4b - c = 0 \end{cases} \text{ و هو المطلوب}$$

$$3 - \text{ليكن } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) إذن : (1) } -2a + 2b + 2c = 0 \dots\dots (2) \quad 2a - 4b - c = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{بجمع (1) و (2) : } 2b + 2c - 4b - c = 0$$

$$-2b + c = 0 \quad \text{أي :}$$

$$c = 2b \quad \text{أي :}$$

$$\text{ليكن } b = 2 \quad \text{إذن : } c = 4$$

$$\text{بالتعويض في (2) : } 2a = 4b + c \quad \text{أي : } 2a = 4(2) + 4$$

$$a = 12/2 = 6 \quad \text{منه}$$

$$\text{نتيجة : } \vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)}$$

$$\text{ملاحظة : الشعاع } \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ هو أيضا شعاع ناظمي للمستوي (ABC) لأنه يوازي } \vec{n}$$

إذن : نأخذ  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء

$\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$  يكافئ  $M \in (ABC)$

$3(x+1) + 1(y-2) + 2(z-0) = 0$  يكافئ

$3x + y + 2z + 1 = 0$  يكافئ  $3x + y + 2z + 1 = 0$  وهي معادلة المستوي (ABC)

التمرين 22

(P) مستوي معادلته  $3x - y + 4z + 1 = 0$

أحسب  $\ell$  بعد النقطة  $A(-1; 2; -1)$  عن المستوي (P)

الحل 22

$$\ell = \frac{|3(-1) - (2) + 4(-1) + 1|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (4)^2}} = \frac{|-3 - 2 - 4 + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 16}} = \frac{8}{\sqrt{26}}$$

التمرين 23

لتكن النقط  $D(3; 5; 1)$  ،  $C(2; 4; -5)$  ،  $B(3; -2; 0)$  ،  $A(1; 0; 1)$

1 - عين شعاعا ناظما للمستوي (ABC)

2 - أحسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC)

الحل 23

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  منه  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$  منه  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-0 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

نتيجة :  $\frac{2}{1} \neq \frac{-2}{4}$  إذن : النقط A ، B ، C تعين مستويا .

ليكن  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$  شعاعا ناظما للمستوي (ABC)

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$  يكافئ  $\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases}$

$\begin{cases} 2 - 2b - c = 0 \\ 1 + 4b - 6c = 0 \end{cases}$  يكافئ

$\begin{cases} 4 - 4b - 2c = 0 \dots\dots (1) \\ 1 + 4b - 6c = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$  يكافئ

بجمع (1) و (2) :  $4 + 1 - 2c - 6c = 0$

أي :  $5 - 8c = 0$  منه  $c = 5/8$

بالتعويض في (2) :  $1 + 4b - 6(5/8) = 0$  منه  $4b = 6(5/8) - 1$

أي  $4b = \frac{15}{4} - 1$

أي  $b = 11/16$

نتيجة :  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 11/16 \\ 5/8 \end{pmatrix}$  شعاع ناظمي لـ المستوي (ABC)

منه :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$  هو أيضا شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

إذن : معادلة (ABC) هي :  $16x + 11y + 10z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي ثابت

$A \in (ABC)$  إذن :  $16(1) + 11(0) + 10(1) + \alpha = 0$

منه :  $26 + \alpha = 0$  أي  $\alpha = -26$

نتيجة : معادلة المستوي (ABC) هي  $16x + 11y + 10z - 26 = 0$

2- لتكن  $\ell$  المسافة بين D و المستوي (ABC)

$$\ell = \frac{|16(3) + 11(5) + 10(3) - 26|}{\sqrt{16^2 + 11^2 + 10^2}} = \frac{|48 + 55 + 30 - 26|}{\sqrt{256 + 121 + 100}} = \frac{107}{\sqrt{477}}$$

التمرين 24

أحسب بعد النقطة O مبدأ المعط عن المستوي (P) الذي معادلته :  $2x - 3y + 6z - 7 = 0$

الحل 24

لتكن  $\ell$  بعد المبدأ O عن المستوي (P)

$$\ell = \frac{|2(0) - 3(0) + 6(0) - 7|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{7}{\sqrt{49}} = 1$$

التمرين 25

ليكن (P) المستوي ذو المعادلة  $y = 2x - 1$

M النقطة ذات الإحداثيات  $M(3; 0; 2)$

1- عين  $\ell$  بعد النقطة M عن (P)

2- استنتج بعد النقطة M عن المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = 2x - 1$  في المستوي  $(x \circ y)$

الحل 25

1-  $y = 2x - 1$  يكافئ  $2x - y - 1 = 0$

منه :

$$\ell = \frac{|2(3) - (0) + 0(2) - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 0}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

2- لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على المستوي ذو المعادلة  $y = 2x - 1$

إذن :  $MH = \ell = \sqrt{5}$

و ليكن K مسقط النقطة M على المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x - 1$

من المستوي  $(x \circ y)$  إذن :  $HK = 2$  لأن راقم النقطة M هو 2.

في المثلث القائم في H : HKM لدينا :  $HM^2 + HK^2 = KM^2$

منه :  $\ell^2 + 2^2 = KM^2$

أي :  $5 + 4 = KM^2$

منه :  $KM = \sqrt{9} = 3$

نتيجة : بعد النقطة M عن المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x - 1$  من المستوي  $(x \circ y)$  هو 3.

التمرين 26

لتكن النقط  $A(1; 0; -1)$  ،  $B(2; 2; 3)$  ،  $C(3; 1; -2)$  ،  $D(-4; 2; 1)$

1- بين أن المثلث ABC قائم ثم أحسب مساحته .

2- بين أن الشعاع  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ناظمي للمستوي (ABC)

3- استنتج معادلة للمستوي (ABC)

4- أحسب الحجم V لرباعي الوجوه DABC

الحل 26

$$AB = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21} \quad \text{منه :} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{إذن :} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-0 \\ 3+1 \end{pmatrix} \quad -1$$

$$AC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \quad \text{منه} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{إذن} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-0 \\ -2+1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} \quad \text{منه} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{إذن} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-2 \\ -2-3 \end{pmatrix}$$

$$AB^2 + AC^2 = 21 + 6 = 27 = BC^2 \quad \text{نتيجة :}$$

إذن : حسب فيثاغورث فإن ABC مثلث قائم في A

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \quad \text{إذن : المساحة S للمثلث ABC هي :}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{21} \times \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{14}}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$\vec{n} \perp \vec{AB} \quad \text{إذن} \quad \vec{n} \cdot \vec{AB} = 2(1) - 3(2) + 1(4) = 0 \quad -2$$

$$\vec{n} \perp \vec{AC} \quad \text{إذن} \quad \vec{n} \cdot \vec{AC} = 2(2) - 3(1) + 1(-1) = 0$$

نتيجة :  $\vec{n}$  شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad 2x - 3y + z + \alpha = 0 \quad \text{له المعادلة (ABC) : إذن : (ABC) شعاع ناظمي للمستوي (ABC) } \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad -3$$

$$2(1) - 3(0) + (-1) + \alpha = 0 \quad \text{إذن : } A \in (ABC)$$

$$\alpha = -1 \quad \text{إذن :}$$

$$2x - 3y + z - 1 = 0 \quad \text{منه : معادلة المستوي (ABC)}$$

$$V = \frac{1}{3} S \times H \quad \text{حيث H هو الارتفاع المتعلق بالرأس D} \quad -4$$

منه H هي المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) كمايلي :

$$H = \frac{|2(-4) - 3(2) + (1) - 1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{14}}{2} \times \sqrt{14} = 14/2 = 7 \quad \text{منه :}$$

ملاحظة : هذه المسافات و المساحات و الحجوم مقدرة بوحدة القياس

التمرين 27

(P) و (Q) مستويان معرفين بالمعادلتين :  $2x + y - z = 0$  و  $x - y + 2z = 0$  على الترتيب .

1 - تحقق أن  $A(1; 0; -3)$  متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

2 - عين مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

$$\frac{|2(1) + (0) - (-3)|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \quad \text{الحل 27} \quad \text{1 - المسافة بين A والمستوي (P) :}$$

$$\frac{|(1) - (0) + 2(-3)|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \quad \text{المسافة بين A والمستوي (Q) :}$$

نتيجة : النقطة A متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

2 - لنكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء

نسمي  $l$  مسافة النقطة M عن المستوي (P)

نسمي  $h$  مسافة النقطة M عن المستوي (Q)

$$\begin{cases} \ell = \frac{|2x+y-z|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|2x+y-z|}{\sqrt{6}} \\ h = \frac{|x-y+2z|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|x-y+2z|}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{|2x+y-z|}{\sqrt{6}} = \frac{|x-y+2z|}{\sqrt{6}} \quad \text{يكافئ} \quad \ell = h \quad \text{نتيجة :}$$

$$|2x+y-z| = |x-y+2z| \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} 2x+y-z = x-y+2z \\ \text{أو} \\ 2x+y-z = -(x-y+2z) \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} 2x+y-z-x+y-2z=0 \\ \text{أو} \\ 2x+y-z+x-y+2z=0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ \text{أو} \\ 3x+z=0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : مجموعة النقط  $M$  المتساوية المسافة عن المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  هي النقط التي تنتمي إلى أحد المستويين الذين معادلاتهما  $x+2y-3z=0$  أو  $3x+z=0$

مثلا : النقطه  $A(1; 0; -3)$  تنتمي إلى المستوي الذي معادلته  $3x+z=0$

النقطه  $B(1; 1; 1)$  تنتمي إلى المستوي الذي معادلته  $x+2y-3z=0$

#### التمرين - 28

$A, B, C$  ثلاث نقط من الفضاء حيث  $ABC$  مثلث قائم في  $C$  و متساوي الساقين .

$(P)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق :  $\|3\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2\|\vec{MB} + \vec{MC}\|$

تحقق أن  $(P)$  مستوي عمودي على المستوي  $(ABC)$  يطلب تعيين تقاطعهما .

#### الحل - 28

لنكن  $G_1$  مرجح الجملة  $\{(A; 3); (B; 1)\}$  إذن :  $3\vec{MA} + \vec{MB} = 4\vec{MG}_1$

لنكن  $G_2$  مرجح الجملة  $\{(B; 1); (C; 1)\}$  إذن :  $\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MG}_2$  ( $G_2$  هي منتصف  $[BC]$ )

إذن :  $\|3\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2\|\vec{MB} + \vec{MC}\|$  يكافئ  $\|4\vec{MG}_1\| = 2\|2\vec{MG}_2\|$

$4\|\vec{MG}_1\| = 4\|\vec{MG}_2\|$  يكافئ

$\|\vec{MG}_1\| = \|\vec{MG}_2\|$  يكافئ

إذن :  $M$  تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[G_1G_2]$

بما أن  $G_1$  و  $G_2$  تنتميان إلى المستوي  $(ABC)$  فإن المستوي المحوري للقطعة  $[G_1G_2]$  هو مستوي عمودي على

المستوي  $(ABC)$  و يقطعه في المستقيم الذي هو محور القطعة المستقيمة  $[G_1G_2]$

#### التمرين - 29

$(P)$  مستوي .  $O$  نقطة من  $(P)$  و  $(\Delta)$  مستقيم من  $(P)$  يشمل  $O$

$A$  نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى المستوي  $(P)$

نرفق بالنقطة  $A$  المسقط العمودي  $M$  على المستقيم  $(\Delta)$

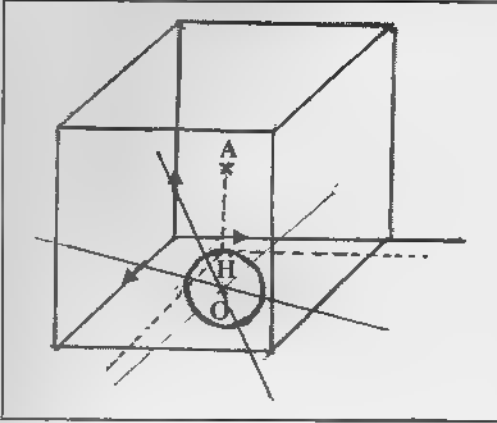
ما هي مجموعة النقط  $M$  لما يأخذ المستقيم  $(\Delta)$  كل الموضعات الممكنة .

#### الحل - 29

$M$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(\Delta)$

$(\Delta)$  يشمل  $O$  إذن لما  $(\Delta)$  يغير الموضعية فإن يدور حول النقطة  $O$  عليه فإن المسافة بين  $O$  و  $M$  ثابتة و تساوي

المسافة بين  $O$  و المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستوي  $(P)$



نتيجة : لتكن H المسقط العمودي لـ A على المستوي (P)

إذن : لما (Δ) يأخذ كل الوضعيات الممكنة فإن M

تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها OH

(محتواة في المستوي (P))

ملاحظة : إذا كان المسقط العمودي لـ A على المستوي (P) هي O فإن مجموعة النقط M لما (Δ) يأخذ كل الوضعيات هي النقطة O فقط .

**التمرين - 30**

ABCD رباعي وجوه منتظم . (P) هي مجموعة نقط الفضاء M التي تحقق :

$$(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD})(\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}) = 0$$

ما هي طبيعة مجموعة النقط (P) ؟

**الحل - 30**

لتكن الجملة المتقلة  $\{(A; 1); (B; 1); (C; -1); (D; -1)\}$

مجموع المعاملات معدوم إذن : الجملة لا تقبل مرجح .

منه : الشعاع  $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}$  ثابت لا يتعلق باختيار النقطة M

$$\vec{u} = \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}$$

$$\vec{u} = \vec{AA} + \vec{AB} - \vec{AC} - \vec{AD} \quad \text{من أجل M تنطبق على A نحصل على :}$$

$$\vec{u} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{DA} \quad \text{أي :}$$

$$\vec{u} = \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{DA} \quad \text{أي :}$$

$$\vec{u} = \vec{CB} + \vec{DA} \quad \text{أي :}$$

لتكن الجملة المتقلة  $\{(A; 1); (B; 1); (C; 1); (D; 1)\}$

مجموع المعاملات غير معدوم يساوي 4 إذن الجملة تقبل مرجحا G هو مركز ثقل الرباعي الوجوه ABCD

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4 \vec{MG} \quad \text{منه :}$$

$$4 \vec{MG} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{يكافئ} \quad (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD})(\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}) = 0$$

$$\vec{MG} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : (P) هو المستوي الذي يشمل النقطة G و  $\vec{u}$  شعاع ناظمي له .

**التمرين - 31**

A و B نقطتان متميزتان من الفضاء

ليكن G مرجح الجملة  $\{(A; a); (B; b)\}$  حيث  $a + b \neq 0$

و ليكن K مرجح الجملة  $\{(A; 1/a); (B; 1/b)\}$  حيث  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$

نضع I منتصف [AB]

1- برر وجود النقطة K

2- بين أن I هي منتصف [GK]

3- أحسب GK بدلالة AB

4- عين الشرط على a و b حتى يكون  $GK > AB$

**الحل - 31**

1-  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} \quad \text{إذن :} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq 0 \quad \text{لأن} \quad a+b \neq 0$$

منه : النقطة K موجودة (مجموع المعاملات غير معدوم)

2- G مرجح الجملة  $\{(A; a); (B; b)\}$  إذن : من أجل كل نقطة M فإن :

$$a \vec{MA} + b \vec{MB} = (a+b) \vec{MG}$$

$$a \vec{IA} + b \vec{IB} = (a+b) \vec{IG} \quad \text{فإن :}$$

لكن I منتصف [AB] إذن :  $\vec{IB} = \vec{AI}$  منه  
 $a\vec{IA} + b\vec{AI} = (a+b)\vec{IG}$   
 $a\vec{IA} - b\vec{IA} = (a+b)\vec{IG}$  أي  
 $(a-b)\vec{IA} = (a+b)\vec{IG}$  أي  
 من جهة أخرى K هو مرجح الجملة  $\{(A; 1/a); (B; 1/b)\}$  إذن : من أجل كل نقطة M  
 $\frac{1}{a}\vec{MA} + \frac{1}{b}\vec{MB} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\vec{MK}$  فإن

إذن : من أجل M تنطبق على I :  $\frac{1}{a}\vec{IA} + \frac{1}{b}\vec{IB} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\vec{IK}$

$$\frac{1}{a}\vec{IA} + \frac{1}{b}\vec{IB} = \frac{a+b}{ab}\vec{IK} \quad \text{أي :}$$

$$\vec{IA} + \frac{a}{b}\vec{IB} = \frac{a+b}{b}\vec{IK} \quad \text{منه :}$$

$$\vec{IB} = -\vec{IA} \quad \text{لكن}$$

$$\vec{IA} - \frac{a}{b}\vec{IA} = \frac{a+b}{b}\vec{IK} \quad \text{منه :}$$

$$\left(1 - \frac{a}{b}\right)\vec{IA} = \frac{a+b}{b}\vec{IK} \quad \text{أي}$$

$$\frac{b-a}{b}\vec{IA} = \frac{a+b}{b}\vec{IK} \quad \text{أي}$$

$$(b-a)\vec{IA} = (a+b)\vec{IK} \quad \text{أي}$$

نتيجة : من العلاقتين (1) و (2) لدينا :

$$\begin{cases} (a-b)\vec{IA} = (a+b)\vec{IG} \\ -(a-b)\vec{IA} = (a+b)\vec{IK} \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} (a-b)\vec{IA} = (a+b)\vec{IG} \\ (b-a)\vec{IA} = (a+b)\vec{IK} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)\vec{IA} = (a+b)\vec{IG} \\ (a-b)\vec{IA} = -(a+b)\vec{IK} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} (a-b)\vec{IA} = (a+b)\vec{IG} \\ (a-b)\vec{IA} = (a+b)\vec{KI} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\vec{IG} = \vec{KI} \quad \text{يكافئ}$$

$$I \text{ منتصف } [KG] \quad \text{يكافئ}$$

$$(a-b)\vec{IA} = (a+b)\vec{IG} \quad \text{3 - من المساواة (1) لدينا :}$$

$$\frac{a-b}{a+b}\vec{IA} = \vec{IG} \quad \text{منه :}$$

$$\left|\frac{a-b}{a+b}\right|\vec{IA} = \vec{IG} \quad \text{إذن :}$$

$$2\left|\frac{a-b}{a+b}\right|\vec{IA} = 2\vec{IG} \quad \text{منه :}$$

$$\vec{IA} = \frac{AB}{2} \quad \text{أي :} \quad 2\left|\frac{a-b}{a+b}\right| \times \frac{AB}{2} = 2\vec{IG}$$

$$\left|\frac{a-b}{a+b}\right|\vec{AB} = 2\vec{IG} \quad \text{منه :}$$

$$2\vec{IG} = \vec{KG} \quad \text{لأن } \vec{KG} = \left|\frac{a-b}{a+b}\right| \times \vec{AB} \quad \text{نتيجة :}$$

$$\left|\frac{a-b}{a+b}\right|\vec{AB} > \vec{AB} \quad \text{يكافئ } \vec{KG} > \vec{AB} \quad \text{5 -}$$



يكافئ  $\left| \frac{a-b}{a+b} \right| > 1$  و هو الشرط الذي يحققه العدان  $a$  و  $b$

## التمرين 32

ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين حيث  $AB = AC = a$  وسوط حقيقي .

1 - ما هو الشرط اللازم و الكافي حتى تقبل الجملة  $\{(A; -1); (B; 2); (C; m)\}$  مرجحا  $G_m$  .

2 - تحقق أن  $G_0G_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

3 - عين المجموعة  $(\Gamma_1)$  من النقط M حيث  $\| -\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \|$

4 - عين المجموعة  $(\Gamma_2)$  من النقط M حيث  $\| -\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} \| = AB$

## الحل 32

1 - الجملة تقبل مرجح إذا و فقط إذا كان  $-1 + 2 + m \neq 0$  أي  $m \neq -1$

2 - من أجل  $m = 0$  :  $(1) \dots -\vec{AG}_0 + 2\vec{BG}_0 = \vec{0}$

من أجل  $m = 1$  :  $(2) \dots -\vec{AG}_1 + 2\vec{BG}_1 + \vec{CG}_1 = \vec{0}$

بطرح (1) من (2) :  $-\vec{AG}_1 + 2\vec{BG}_1 + \vec{CG}_1 + \vec{AG}_0 - 2\vec{BG}_0 = \vec{0}$

أي :  $\vec{G}_1A + 2\vec{BG}_1 + \vec{CG}_1 + \vec{AG}_0 + 2\vec{G}_0B = \vec{0}$

أي :  $\vec{CG}_1 + \vec{G}_1A + \vec{AG}_0 + 2(\vec{G}_0B + \vec{BG}_1) = \vec{0}$

أي :  $\vec{CA} + \vec{AG}_0 + 2\vec{G}_0G_1 = \vec{0}$

أي :  $\vec{CG}_0 + 2\vec{G}_0G_1 = \vec{0}$

أي :  $\vec{CG}_0 = -2\vec{G}_0G_1$

أي :  $\vec{CG}_0 = 2\vec{G}_1G_0$

منه :  $G_1$  هي منتصف  $[CG_0]$

لنبحث عن موضع  $G_0$  :

لدينا :  $-\vec{AG}_0 + 2\vec{BG}_0 = \vec{0}$  منه  $\vec{AG}_0 = 2\vec{BG}_0$

منه :  $G_0$  هي نظيرة A بالنسبة إلى B

الإنشاء :

البحث عن  $G_0G_1$  :

$$G_0G_1 = \frac{1}{2} CG_0$$

في المثلث القائم  $ACG_0$  لدينا :

$$CA^2 + AG_0^2 = CG_0^2$$

$$a^2 + (2a)^2 = CG_0^2$$

$$5a^2 = CG_0^2$$

$$CG_0 = a\sqrt{5}$$

$$G_0G_1 = \frac{1}{2} CG_0 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \quad \text{إذن :}$$

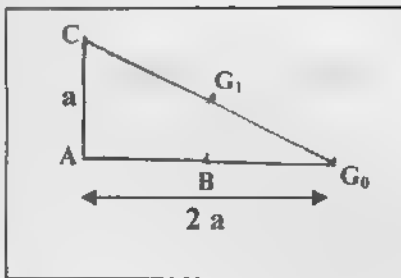
3 - لنكن G مركز ثقل المثلث ABC إذن :  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

$$\| 3\vec{MG}_2 \| = \| 3\vec{MG} \| \quad \text{يكافئ} \quad \| -\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \|$$

$$\| \vec{MG}_2 \| = \| \vec{MG} \| \quad \text{يكافئ}$$

يكافئ M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة

$[GG_2]$



إذن :  $(\Gamma_1)$  هي المستوي المحوري للقطعة  $[G_2G]$

$$\| 3 \overrightarrow{MG_2} \| = a \quad \text{يكافئ} \quad \| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = AB - 2$$

$$3 \| \overrightarrow{MG_2} \| = a \quad \text{يكافئ}$$

$$\| \overrightarrow{MG_2} \| = a/3 \quad \text{يكافئ}$$

يكافئ  $M$  تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها  $G_2$  و نصف قطرها  $a/3$

### التمرين 33

$A, B, C, D$  نقط من الفضاء .  $G$  مرجح الجملة  $\{(A; a); (B; b); (C; c); (D; d)\}$

حيث  $a \neq 0$  و  $a+b+c+d \neq 0$

ما هو مرجح الجملة  $\{(A; -a-b-c-d); (B; b); (C; c); (D; d)\}$

### الحل 33

$$(1) \dots\dots\dots a \overrightarrow{AG} + b \overrightarrow{BG} + c \overrightarrow{CG} + d \overrightarrow{DG} = \vec{0}$$

ليكن  $K$  مرجح الجملة  $\{(A; -a-b-c-d); (B; b); (C; c); (D; d)\}$

$$(2) \dots\dots\dots (-a-b-c-d) \overrightarrow{KA} + b \overrightarrow{KB} + c \overrightarrow{KC} + d \overrightarrow{KD} = \vec{0} \quad \text{إذن :}$$

$$\text{بجمع (1) و (2) : } a \overrightarrow{AG} + (-a-b-c-d) \overrightarrow{KA} + b(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BG}) + c(\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CG}) + d(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DG}) = \vec{0}$$

$$a \overrightarrow{AG} - a \overrightarrow{KA} - b \overrightarrow{KA} - c \overrightarrow{KA} - d \overrightarrow{KA} + b \overrightarrow{KG} + c \overrightarrow{KG} + d \overrightarrow{KG} = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$a \overrightarrow{AG} + a \overrightarrow{AK} + b \overrightarrow{AK} + c \overrightarrow{AK} + d \overrightarrow{AK} + b \overrightarrow{KG} + c \overrightarrow{KG} + d \overrightarrow{KG} = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$a \overrightarrow{AG} + a \overrightarrow{AK} + b(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KG}) + c(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KG}) + d(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KG}) = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$a \overrightarrow{AG} + a \overrightarrow{AK} + b \overrightarrow{AG} + c \overrightarrow{AG} + d \overrightarrow{AG} = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$a \overrightarrow{AK} + (a+b+c+d) \overrightarrow{AG} = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$a \overrightarrow{AK} = -(a+b+c+d) \overrightarrow{AG} \quad \text{أي :}$$

$$a \neq 0 \quad \overrightarrow{AK} = \frac{-(a+b+c+d)}{a} \overrightarrow{AG} \quad \text{أي :}$$

### التمرين 34

$ABCD$  رباعي وجوه . نسمي  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $K$  منتصف  $[CD]$

1 - عين النقطتين  $J$  و  $L$  حيث  $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}$

2 - باستعمال النقطة  $G$  مرجح الجملة  $\{(A; 3); (B; 3); (C; 1); (D; 1)\}$  بين أن المستقيمين  $(IK)$  و  $(JL)$  متقاطعان .

### الحل 34

1 - التعيين بالانشاء :

2 - لتكن  $G_1$  مرجح الجملة  $\{(A; 3); (D; 1)\}$

و لتكن  $G_2$  مرجح الجملة  $\{(B; 3); (C; 1)\}$

إذن :  $G$  هو مرجح الجملة  $\{(G_1; 4); (G_2; 4)\}$

أي  $G$  هي منتصف  $[G_1G_2]$

$$3 \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{DG_1} = \vec{0} \quad \text{لدينا :}$$

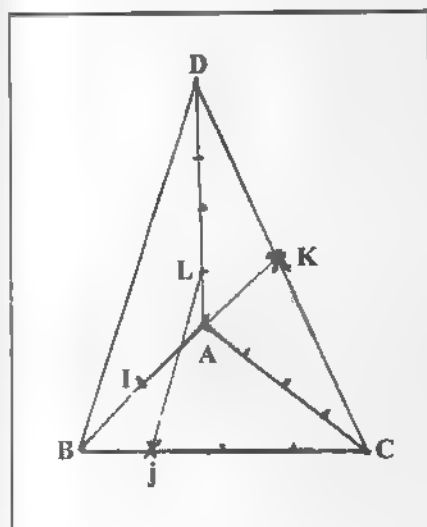
$$3 \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG_1} = \vec{0} \quad \text{إذن :}$$

$$4 \overrightarrow{AG_1} = -\overrightarrow{DA} \quad \text{إذن :}$$

$$4 \overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AD} \quad \text{أي}$$

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \quad \text{لكن} \quad \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \quad \text{منه :}$$

إذن :  $G_1$  تنطبق على  $L$



$$3 \vec{BG}_2 + \vec{CG}_2 = \vec{0} \quad \text{لدينا أيضا :}$$

$$3 \vec{BG}_2 + \vec{CB} + \vec{BG}_2 = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$4 \vec{BG}_2 = -\vec{CB} \quad \text{أي}$$

$$\vec{BJ} - \frac{1}{4} \vec{BC} \quad \text{لكن} \quad \vec{BG}_2 = \frac{1}{4} \vec{BC} \quad \text{أي}$$

إذن :  $G_2$  تنطبق على J

نتيجة : G هي منتصف [JL]

من جهة أخرى : لتكن  $K_1$  مرجح الجملة  $\{(A; 3); (B; 3)\}$  إذن :  $K_1$  منتصف [AB]  
منه :  $K_1$  تنطبق على I

و لتكن  $K_2$  مرجح الجملة  $\{(C; 1); (D; 1)\}$  إذن :  $K_2$  منتصف [CD]  
منه :  $K_2$  تنطبق على K

G هي مرجح للجملة  $\{(K_1; 4); (K_2; 4)\}$  إذن : G هي منتصف  $[K_1K_2]$   
أي G هي منتصف [IK]

خلاصة :  $\left. \begin{array}{l} G \text{ منتصف } [JL] \\ G \text{ منتصف } [IK] \end{array} \right\}$  إذن : (JL) و (IK) متقاطعان في النقطة G

### التمرين = 35

ABCD رباعي من المستوي . I منتصف [AC] ، J منتصف [BD]

K نقطة حيث  $\vec{KA} = -2 \vec{KB}$

L نقطة حيث  $\vec{LC} = -2 \vec{LD}$  و M منتصف [LK]

G مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; 2); (C; 1); (D; 2)\}$

1 - بين أن G ينتمي إلى المستقيمين (IJ) و (KL)

2 - بين أن G منطبقة على M وأن I ، J ، M على استقامة واحدة . ثم حدد وضعيتها بالنسبة إلى [IJ]

### الحل = 35

1 - لتكن  $G_1$  مرجح الجملة  $\{(A; 1); (C; 1)\}$  إذن :  $G_1$  منتصف [AC]

منه :  $G_1$  تنطبق على I

لتكن  $G_2$  مرجح الجملة  $\{(B; 2); (D; 2)\}$  إذن :  $G_2$  منتصف [BD]

منه :  $G_2$  تنطبق على J

نتيجة : G هي مرجح الجملة  $\{(G_1; 2); (G_2; 4)\}$

$$2 \vec{G_1G} + 4 \vec{G_2G} = \vec{0} \quad \text{منه :}$$

$$2 \vec{IG} + 4 \vec{JG} = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$\vec{IG} + 2 \vec{JG} = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$\vec{IG} = -2 \vec{JG} \quad \text{أي :}$$

$$\vec{IG} // \vec{JG} \quad \text{أي :}$$

منه : النقط I ، J ، G على استقامة واحدة . أي  $G \in (JI) \dots\dots\dots (1)$

من جهة أخرى :  $\left. \begin{array}{l} \vec{KA} + 2 \vec{KB} = \vec{0} \\ \vec{LC} + 2 \vec{LD} = \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{منه :} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{KA} = -2 \vec{KB} \\ \vec{LC} = -2 \vec{LD} \end{array} \right\}$

منه :  $\left. \begin{array}{l} K \text{ مرجح الجملة } \{(A; 1); (B; 2)\} \\ L \text{ مرجح الجملة } \{(C; 1); (D; 2)\} \end{array} \right\}$

منه :  $\left. \begin{array}{l} K \text{ مرجح الجملة } \{(A; 1); (B; 2)\} \\ L \text{ مرجح الجملة } \{(C; 1); (D; 2)\} \end{array} \right\}$

منه :  $3 \vec{KG} + 3 \vec{LG} = \vec{0}$  لأن G هي مرجح الجملة  $\{(K; 3); (L; 3)\}$

$$\vec{KG} + \vec{LG} = \vec{0} \quad \text{أي :}$$

$$\vec{KG} = -\vec{LG} \quad \text{أي :} \quad (\alpha) \dots\dots\dots$$

$$\vec{KG} // \vec{LG} : \text{أي}$$

منه :  $K, L, G$  على استقامة واحدة .

$$\text{أي } G \in (LG) \dots\dots\dots (2)$$

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن  $G$  تنتمي إلى كل من المستقيمين  $(JI)$  و  $(KL)$

$$\vec{KG} = -\vec{LG} : \text{لدينا : من العلاقة } (\alpha)$$

$$\vec{KG} = \vec{GL} : \text{أي}$$

إذن :  $G$  هي منتصف  $[KL]$

منه :  $G$  تنطبق على  $M$

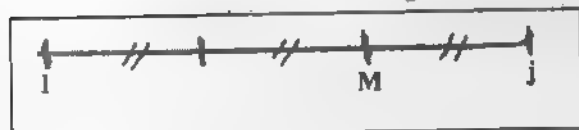
نتيجة :  $M, I, J$  على استقامة واحدة .

وضعية  $M$  بالنسبة إلى  $[IJ]$  :

$$\vec{IM} = -2\vec{JM} : \text{لدينا : } \vec{IG} = -2\vec{JG} \text{ إذن}$$

$$\vec{IM} = 2\vec{MJ} : \text{أي}$$

منه :  $M$  تنتمي إلى القطعة المستقيمة  $[IJ]$  حيث  $MJ = \frac{1}{3} IJ$  كما يلي :



### التمرين - 36

$A, B, C$  ثلاث نقط متمایزة من الفضاء

$G$  مرجح الجملة  $\{(B; -1); (C; 2)\}$

$F$  مرجح الجملة  $\{(A; -2); (B; 2); (C; -4)\}$

1- بين أن  $F$  هي مرجح جملة نقطتين مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما

2- عين المجموعة  $(E_1)$  من النقط  $M$  حيث  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = AG$

3- تحقق أن  $A$  و  $G$  تنتميان إلى  $(E_1)$

4- عين المجموعة  $(E_2)$  من النقط  $M$  حيث  $\|\vec{MA} + \vec{MG}\| = \|\vec{MA} - \vec{MF}\|$

### الحل - 36

1- لنكن  $G_1$  مرجح الجملة  $\{(B; 2); (C; -4)\}$

من خواص المرجح أنه لا يتغير إذا ضربنا كل معاملات الجملة في نفس العدد الحقيقي غير المعدوم

إذن :  $G_1$  هو مرجح الجملة  $\{(B; 2(-1/2)); (C; -4(-1/2))\}$

أي :  $G_1$  هو مرجح الجملة  $\{(B; -1); (C; 2)\}$

أي :  $G_1$  ينطبق على  $G$

منه :  $F$  هو مرجح الجملة  $\{(G; 2-4); (A; -2)\}$

أي :  $F$  هو مرجح الجملة  $\{(G; -2); (A; -2)\}$

نتيجة :  $F$  هو منتصف القطعة  $[GA]$

2-  $F$  هو مرجح الجملة  $\{(A; -2); (B; 2); (C; -4)\}$

إذن :  $F$  هو مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; -1); (C; 2)\}$  (جداء المعاملات في  $(-1/2)$ )

$$\vec{AM} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = 2\vec{MF} : \text{منه}$$

$$\|\vec{AM} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = AG \text{ يكافئ } \|\vec{MF}\| = \frac{1}{2} AG$$

$$\|\vec{MF}\| = \frac{1}{2} AG \text{ يكافئ}$$

يكافئ  $M$  تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها  $F$

و نصف قطرها  $\frac{1}{2} AG$

نتيجة :  $(E_1)$  هو سطح الكرة ذات المركز  $F$  و نصف القطر  $\frac{AG}{2}$

3 - F هي منتصف [AG] إذن [AG] هو قطر لسطح الكرة (E<sub>1</sub>)

منه : A و G تنتميان إلى (E<sub>1</sub>)

$$4 - \vec{MA} + \vec{MG} = 2\vec{MF} \text{ لأن } F \text{ منتصف } [AG]$$

$$\vec{MA} - \vec{MF} = \vec{MA} + \vec{FM} = \vec{FA}$$

$$\text{نتيجة : } \|\vec{MA} + \vec{MG}\| = \|\vec{MA} - \vec{MF}\| \text{ يكافئ } \|2\vec{MF}\| = \|\vec{FA}\|$$

$$\|\vec{MF}\| = \frac{1}{2} \|\vec{FA}\| \text{ يكافئ}$$

يكافئ M تنتمي إلى سطح الكرة ذات المركز F و نصف القطر  $\frac{FA}{2}$

$$\text{إذن : } (E_2) \text{ هو سطح الكرة التي مركزها F و نصف قطرها } \frac{FA}{2} = \frac{AG}{4}$$

التمرين 37

لتكن النقط A(1; -1; 1) ، B(2; 0; 1) و C(-3; 1; 0)

1 - تحقق أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى المستوي (π) الذي معادلته  $x - y - 6z + 4 = 0$

2 - علل وجود ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حتى تكون النقط D(3; 1; 1) مرجح الجملة

$$\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$$

الحل - 37

$$1 - A \in (\pi) : \text{إذن } 1 - (-1) - 6(1) + 4 = 6 - 6 = 0$$

$$B \in (\pi) : \text{إذن } 2 - (0) - 6(1) + 4 = 6 - 6 = 0$$

$$C \in (\pi) : \text{إذن } -3 - (1) - 6(0) + 4 = 4 - 4 = 0$$

2 - لتكن D مرجح الجملة  $\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$

$$\text{نفرض أن } a + b + c \neq 0$$

$$\begin{cases} a + 2b - 3c = 3a + 3b + 3c \\ -a + c = a + b + c \\ a + b = a + b + c \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \frac{a + 2b - 3c}{a + b + c} = 3 \\ \frac{-a + c}{a + b + c} = 1 \\ \frac{a + b}{a + b + c} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a - b - 6c = 0 \\ -2a - b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} -2a - b = 0 \\ -2a - b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\text{من أجل } a = 1 \text{ فإن } (a; b; c) = (1; -2; 0)$$

$$3 - 1 - 6 + 4 = 6 - 6 = 0 \text{ هل } D \in (\pi) ?$$

$$\text{إذن : } D \in (\pi)$$

منه : D مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; -2); (C; 0)\}$

التمرين 38

في المعلم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  نعتبر القطع المكافئ ذو المعادلة  $y = x^2$

1 - أكتب معادلة المماس (T<sub>a</sub>) لـ (P) عند النقط A ذات الفاصلة a حيث a عدد حقيقي غير معدوم .

2 - ما هو معامل توجيه مستقيم عمودي على (T<sub>a</sub>) ؟

3 - استنتج أن مماس (P) العمودي على (T<sub>a</sub>) هو مماس في النقط A' ذات الفاصلة  $(\frac{1}{-4a})$

4 - عين معادلة لمماس (P) عند النقط A'

## الحل - 38

1 - ليكن (P) منحنى الدالة f المعرفة على  $R^*$  بـ  $f(x) = x^2$

إذن :  $f'(x) = 2x$

منه : معادلة مماس المنحنى (P) عند النقطة A ذات الفاصلة a نكتب :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{أي} \quad y = 2a(x - a) + a^2$$

أي :  $y = 2ax - a^2$  وهي معادلة المماس  $(T_a)$

2 - الشعاع  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$  هو شعاع توجيه للمماس  $(T_a)$

ليكن  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2a \\ -1 \end{pmatrix}$

إذن :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2a + 2a = 0$

إس : الشعاع  $\vec{v}$  عمودي على المماس  $(T_a)$

إذن : معامل توجيه المستقيم العمودي على  $(T_a)$  هو  $\frac{-1}{2a}$

3 - المماس  $(T')$  للمنحنى (P) و العمودي على  $(T_a)$  له معامل التوجيه  $\frac{-1}{2a}$

أي :  $f'(x) = \frac{-1}{2a}$

منه :  $2x = \frac{-1}{2a}$

أي :  $4ax = -1$

منه :  $x = \frac{-1}{4a}$

أي : فاصلة نقطة تماس  $(T')$  و المنحنى (P) هي  $\frac{-1}{4a}$

4 - لدينا :  $A' \left( \frac{-1}{4a} ; \frac{1}{16a^2} \right)$

منه : معادلة  $(T')$  :

$$y = f' \left( \frac{-1}{4a} \right) \left( x + \frac{1}{4a} \right) + f \left( \frac{-1}{4a} \right)$$

$$y = \frac{-1}{2a} \left( x + \frac{1}{4a} \right) + \frac{1}{16a^2} \quad \text{أي :}$$

$$y = \frac{-1}{2a} x - \frac{1}{8a^2} + \frac{1}{16a^2} \quad \text{أي :}$$

$$y = \frac{-1}{2a} x - \frac{1}{16a^2} \quad \text{أي :}$$

## التمرين - 39

ABCDIJKL مكعب في الفضاء . المنسوب إلى المعلم  $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD} ; \vec{AI})$  ليكن G مركز ثقل المثلث IBK .

1 - عين إحداثيات G

2 - تحقق أن G تنتمي إلى المستقيم (JD)

3 - تحقق أن  $\vec{JD}$  عمودي على  $\vec{BK}$  و  $\vec{BI}$  . ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BIK)

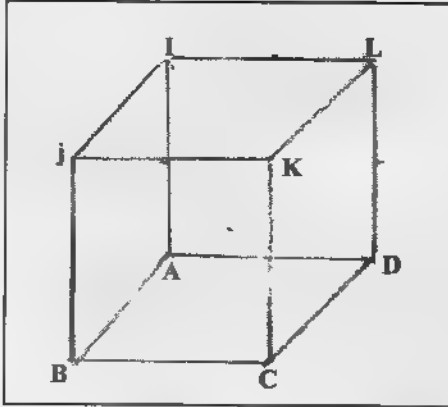
## الحل - 39

الانشاء : في المعلم  $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD} ; \vec{AI})$  لدينا إحداثيات النقط كما يلي :

$$D(0 ; 1 ; 0) ; J(1 ; 0 ; 1) ; K(1 ; 1 ; 1) ; I(0 ; 0 ; 1) ; B(1 ; 0 ; 0) ; A(0 ; 0 ; 0)$$

1 - G مركز ثقل المثلث IBK إذن : G مرجح الجملة  $\{(I ; 1) ; (B ; 1) ; (K ; 1)\}$

$$\text{منه : إحداثيات G هي : } \left( \frac{1+1+0}{3} ; \frac{0+0+1}{3} ; \frac{0+1+1}{3} \right)$$



أي  $G(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

$$\vec{GJ} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{GJ} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} \\ 0 - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad -2$$

$$\vec{GD} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{GD} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} \\ 0 - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

نتيجة :  $\frac{1/3}{-2/3} = -\frac{1}{2} ; \frac{-1/3}{2/3} = -\frac{1}{2} ; \frac{1/3}{-2/3} = -\frac{1}{2}$

إذن :  $\vec{GJ} // \vec{GD}$

منه : النقط G ، J ، D على استقامة واحدة .

أي  $G \in (JD)$

$$\vec{JD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{JD} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \quad -2$$

$$\vec{BK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{BK} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BI} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{BI} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$$

نتيجة :  $\vec{JD} \perp \vec{BK} : \vec{JD} \cdot \vec{BK} = -1(0) + 1(1) - 1(1) = 0$

$\vec{JD} \perp \vec{BI} : \vec{JD} \cdot \vec{BI} = -1(-1) + 1(0) - 1(1) = 0$

إذن : الشعاع  $\vec{JD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ناظمي للمستوي (BKI)

أي : المستوي (BKI) له المعادلة  $-x + y - z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}$

إذن :  $B \in (BKI) : -1 + 0 - 0 + \alpha = 0$

أي  $\alpha = 1$

منه :  $-x + y - z + 1 = 0$  هي معادلة المستوي (BKI)

#### التمرين 40

ليكن  $(\Delta)$  مستقيم مزود بمعلم  $(\vec{t}; 0)$  .  $A_0$  ،  $B_0$  نقطتان من  $(\Delta)$  فاصلتاها على الترتيب (-4) و (+3)

لكل عدد طبيعي  $n$  نضع  $\{A_{n+1}; B_{n+1}\}$  مرجع الجملة  $\{(A_n; 1); (B_n; 4)\}$

$\{(A_n; 3); (B_n; 2)\}$  مرجع الجملة  $\{(A_n; 3); (B_n; 2)\}$

1 - علم  $A_1$  ،  $B_1$  ،  $A_0$  ،  $B_0$

2 - ليكن  $a_n$  ،  $b_n$  فواصل النقطتين  $A_n$  و  $B_n$  على الترتيب .

عبر عن  $a_{n+1}$  و  $b_{n+1}$  بدلالة  $a_n$  و  $b_n$

3 - بين أن من أجل كل عدد طبيعي  $n : 3a_n + 4b_n = 0$

4 - استنتج أن  $b_{n+1} = \frac{-2}{5} b_n$  و  $a_{n+1} = \frac{-2}{5} a_n$

5 - أكتب  $a_n$  و  $b_n$  بدلالة  $n$  ثم أكتب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$  ؟

6 - ماذا يمكن القول عن وضعيتي  $A_n$  و  $B_n$  ؟

الحل - 40

- 1

$A_1$  مرجح الجملة  $\{(A_0; 1); (B_0; 4)\}$  إذن : فاصلة  $A_1$  :  $\frac{-4 + 3(4)}{4 + 1} = \frac{8}{5}$

$B_1$  مرجح الجملة  $\{(A_0; 3); (B_0; 2)\}$  إذن : فاصلة  $B_1$  :  $\frac{-4(3) + 3(2)}{4 + 1} = \frac{-6}{5}$

2 -  $A_{n+1}$  مرجح  $\{(A_n; 1); (B_n; 4)\}$  منه :  $a_{n+1} = \frac{a_n + 4 b_n}{5}$

$B_{n+1}$  مرجح  $\{(A_n; 3); (B_n; 2)\}$  منه :  $b_{n+1} = \frac{3a_n + 2 b_n}{5}$

3 - البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية  $3 a_n + 4 b_n = 0$

من أجل  $n = 0$  :  $3 a_0 + 4 b_0 = 3(-4) + 4(3) = 0$

إذن : الخاصية محققة .

من أجل  $n = 1$  :  $3 a_1 + 4 b_1 = 3\left(\frac{8}{5}\right) + 4\left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{24}{5} - \frac{24}{5} = 0$

إذن : الخاصية محققة .

نفرض أن :  $3 a_n + 4 b_n = 0$  من أجل  $n > 1$

هل  $3 a_{n+1} + 4 b_{n+1} = 0$  ؟

$3 a_{n+1} + 4 b_{n+1} = 3\left(\frac{a_n + 4 b_n}{5}\right) + 4\left(\frac{3a_n + 2 b_n}{5}\right)$

$= \frac{3 a_n + 12 b_n + 12 a_n + 8 b_n}{5}$

$= \frac{15 a_n + 20 b_n}{5}$

$= \frac{5(3 a_n + 4 b_n)}{5}$

$= 0$  لأن حسب فرضية التراجع  $3 a_n + 4 b_n = 0$

منه : الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $3 a_n + 4 b_n = 0$

4 -  $3 a_n + 4 b_n = 0$  إذن :  $3 a_n = -4 b_n$

منه :  $\left. \begin{array}{l} (1) \dots a_n = \frac{-4}{3} b_n \\ (2) \dots b_n = \frac{-3}{4} a_n \end{array} \right\}$

لدينا :  $\left. \begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{a_n + 4 b_n}{5} \\ b_n = \frac{-3}{4} a_n \end{array} \right\}$  منه :

$a_{n+1} = \frac{a_n - 3 a_n}{5} = \frac{-2}{5} a_n$  أي :

$b_{n+1} = \frac{3\left(\frac{-4}{3} b_n\right) + 2 b_n}{5}$  منه :

$b_{n+1} = \frac{-4 b_n + 2 b_n}{5} = \frac{-2}{5} b_n$  أي :

و  $\left. \begin{array}{l} b_{n+1} = \frac{3a_n + 2 b_n}{5} \\ a_n = \frac{-4}{3} b_n \end{array} \right\}$



$$\left. \begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{-2}{5} a_n \\ b_{n+1} &= \frac{-2}{5} b_n \end{aligned} \right\} : \text{نتيجة :}$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -4 \\ a_{n+1} &= \frac{-2}{5} a_n \end{aligned} \right\} -5 \quad \text{إذن : } (a_n) \text{ متتالية هندسية حدها الأول } a_0 = -4 \text{ و أساسها } -2/5 \text{ منه } a_n = -4 \left( \frac{-2}{5} \right)^n$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 3 \\ b_{n+1} &= \frac{-2}{5} b_n \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن : } (b_n) \text{ متتالية هندسية حدها الأول } b_0 = 3 \text{ و أساسها } -2/5 \text{ منه } b_n = 3 \left( \frac{-2}{5} \right)^n$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \left( \frac{-2}{5} \right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left( \frac{-2}{5} \right)^n = 0 \end{aligned} \right\} : \text{نتيجة :}$$

6- لما  $n$  يؤول إلى  $+\infty$  فإن فاصلة  $A_n$  تؤول إلى 0 إذن :  $A_n$  تقترب من النقطة 0 مبدأ المعلم .  
لما  $n$  يؤول إلى  $+\infty$  فإن فاصلة  $B_n$  تؤول إلى 0 إذن :  $B_n$  تقترب من النقطة 0 مبدأ المعلم .

#### التمرين - 41

A ، B ، C نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء

H مركز ثقل المثلث ABC

G مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$

1- بين أن B ، G ، H على استقامة واحدة .

2- عين المجموعة (E) من النقاط حيث :  $3 \parallel \vec{MA} + 2 \vec{MB} + \vec{MC} \parallel = 4 \parallel \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \parallel$

3- لتكن M نقطة من المستوي .

نضع :  $\vec{u} = \vec{MA} + 2 \vec{MB} + \vec{MC}$  و  $\vec{v} = \vec{MA} + 2 \vec{MB} - 3 \vec{MC}$

(أ) بين أن  $\vec{v}$  مستقل عن النقطة M

(ب) بين أن النقطة C تحقق :  $\parallel \vec{u} \parallel = \parallel \vec{v} \parallel$

(ج) عين مجموعة النقاط (E') التي تحقق :  $\parallel \vec{u} \parallel = \parallel \vec{v} \parallel$

#### الحل - 41

1- H مركز ثقل المثلث ABC إذن : H مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; 1); (C; 1)\}$

ليكن K مرجح الجملة  $\{(A; 1); (C; 1)\}$  إذن : K منتصف [AC]

منه : H هي مرجح الجملة  $\{(K; 2); (B; 1)\}$  منه  $H \in (BK)$

من جهة أخرى G مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$

إذن : G مرجح الجملة  $\{(K; 2); (B; 1)\}$  منه  $G \in (BK)$

خلاصة :  $\left. \begin{aligned} H &\in (BK) \\ G &\in (BK) \end{aligned} \right\}$  إذن : B ، G ، H على استقامة واحدة .

2-  $3 \parallel \vec{MA} + 2 \vec{MB} + \vec{MC} \parallel = 4 \parallel \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \parallel$  يكافئ  $3 \parallel 4 \vec{MG} \parallel = 4 \parallel 3 \vec{MH} \parallel$

يكافئ :  $12 MG = 12 MH$

يكافئ :  $MG = MH$

يكافئ : M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة

المستقيمة [GH]

3-  $\vec{v} = \vec{MA} + 2 \vec{MB} - 3 \vec{MC}$

(أ) لتكن الجملة  $\{(A; 1); (B; 2); (C; -3)\}$

مجموع المعاملات  $1 + 2 - 3 = 0$  إذن : الجملة لا تقبل مرجحا .

إذن : الشعاع  $\vec{v} = \vec{MA} + 2 \vec{MB} - 3 \vec{MC}$  مستقل تماما عن اختيار النقطة M

(ب) لتكن M تنطبق على C

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{CA} + 2\vec{CB} \\ \vec{u} &= \vec{CA} + 2\vec{CB} \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

$$\text{منه : } \vec{u} = \vec{v} \text{ إذن : } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG}\| \text{ يكافئ } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \text{ (ج)}$$

$$\|4\vec{MG}\| = \|\vec{CA} + 2\vec{CB}\| \text{ يكافئ}$$

$$4MG = \|\vec{CA} + 2\vec{CB}\| \text{ يكافئ}$$

$$MG = \frac{1}{4} \|\vec{CA} + 2\vec{CB}\| \text{ يكافئ}$$

يكافئ M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز G و نصف القطر  $\frac{1}{4} \|\vec{CA} + 2\vec{CB}\|$

بما أن C تحقق  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$  فإن C تنتمي إلى هذه الدائرة .

و عليه فالمجموعة (E') هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها GC (أي تشمل C)

التمرين - 42

A ، B ، C ، D نقط متمايزة من الفضاء .

I مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; -2); (C; -3)\}$

J مرجح الجملة  $\{(A; 1); (C; -3); (D; 4)\}$

K مرجح الجملة  $\{(1; A); (B; -2); (D; 4)\}$

1 - بين أن الشعاع  $\vec{u} = \vec{MA} - 2\vec{MB} - 3\vec{MC} + 4\vec{MD}$  مستقل عن النقطة M

2 - بين أن المستقيمت (DI) ، (JB) ، (CK) متوازية

الحل - 42

1 - لنكن الجملة  $S = \{(A; 1); (B; -2); (C; -3); (D; 4)\}$

الجملة S لا تقبل مرجحا لأن مجموع المعاملات معدوم .

منه : الشعاع  $\vec{u} = \vec{MA} - 2\vec{MB} - 3\vec{MC} + 4\vec{MD}$  مستقل عن النقطة M

2 - من أجل M تنطبق على I فإن :  $\vec{u} = \vec{IA} - 2\vec{IB} - 3\vec{IC} + 4\vec{ID}$

لكن :  $\vec{IA} - 2\vec{IB} - 3\vec{IC} = \vec{0}$  لأن I مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; -2); (C; -3)\}$

$$\vec{u} = 4\vec{ID} \text{ إذن :}$$

$$\vec{u} // \vec{ID} \text{ منه :}$$

من أجل M تنطبق على J فإن :  $\vec{u} = \vec{JA} - 2\vec{JB} - 3\vec{JC} + 4\vec{JD}$

لكن :  $\vec{JA} - 3\vec{JC} + 4\vec{JD} = \vec{0}$  لأن J مرجح الجملة  $\{(A; 1); (C; -3); (D; 4)\}$

$$\vec{u} = -2\vec{JB} \text{ إذن :}$$

$$\vec{u} // \vec{JB} \text{ منه :}$$

من أجل M تنطبق على K فإن :  $\vec{u} = \vec{KA} - 2\vec{KB} - 3\vec{KC} + 4\vec{KD}$

لكن :  $\vec{KA} - 2\vec{KB} + 4\vec{KD} = \vec{0}$  لأن K مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; -2); (D; 4)\}$

$$\vec{u} = -3\vec{KC} \text{ إذن :}$$

$$\vec{u} // \vec{KC} \text{ منه :}$$

نتيجة : كل من المستقيمت (DI) و (JB) و (CK) لها نفس شعاع التوجيه  $\vec{u}$

إذن : فهي متوازية مثلى مثلى .

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1/3$$

منه معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $1/3$  هي :  $y = 1(x - \frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3})$

$$\text{لنحسب } f(\frac{1}{3}) : f(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 4}{4/9}$$

$$= \frac{1 - 12 + 72 - 108}{27} \times \frac{9}{4}$$

$$= -\frac{47}{27} \times \frac{9}{4}$$

$$= -\frac{47}{12}$$

$$y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12} \quad \text{إن معادلة المماس هي :}$$

$$y = x + \frac{-4 - 47}{12} \quad \text{أي :}$$

$$y = x - \frac{51}{12} \quad \text{أي :}$$

$$y = x - \frac{17}{4} \quad \text{أي :}$$

إذن : لما  $m = -17/4$  :  $\Delta_m$  مماس لـ (C) أي المعادلة تقبل حلا واحدا

لما  $m < -17/4$  :  $\Delta_m$  تحت المماس إذن المعادلة لا تقبل حلول

لما  $-17/4 < m < -2$  :  $\Delta_m$  فوق المماس إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين

(3) لما  $m > -2$  :  $\Delta_m$  يقع فوق (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطتين مختلفتين ومنه المعادلة  $f(x) = x + m$  تقبل حلين مختلفين

7 - حل المعادلة  $f(x) = x + m$  في  $R - \{1\}$

$$f(x) = x + m \Leftrightarrow \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x + m \quad \text{حيث } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (x + m)(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = x^3 - 2x^2 + x + mx^2 - 2mx + m$$

$$\Leftrightarrow (m + 2)x^2 - (7 + 2m)x + 4 + m = 0 \dots\dots (1)$$

المناقشة :

$$\text{لما } m = -2 \text{ المعادلة تكافئ : } -(7 - 4)x + 4 - 2 = 0$$

$$\text{أي : } -3x + 2 = 0$$

$$\text{أي : } x = 2/3$$

إذن المعادلة  $f(x) = x + m$  تقبل حلا وحيدا  $x = 2/3$

لما  $m \neq -2$  المعادلة من الدرجة الثانية ذات الوسيط  $m$  و المجهول  $x$

$$\Delta = (7 + 2m)^2 - 4(4 + m)(m + 2)$$

$$= 49 + 28m + 4m^2 - 4(4m + 8 + m^2 + 2m)$$

$$= 49 + 28m + 4m^2 - 16m - 32 - 4m^2 - 8m$$

$$= 4m + 17$$

منه

$x$	$-\infty$	$-17/4$	$-2$	$+\infty$
$\Delta$	$-$	$0$	$+$	$+$

- إذن : لما  $\Delta < 0 : m \in ]-\infty ; -17/4[$  إذن المعادلة لا تقبل حلول في IR  
 لما  $\Delta = 0 : m = -17/4$  إذن المعادلة تقبل حل مضاعف .  
 لما  $\Delta > 0 : m \in ]-17/4 ; -2[ \cup ]-2 ; +\infty[$  إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين .

## التمرين - 71

$$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1} \rightarrow \text{IR}$$

نسمي (C) منحنىها في مستوي منسوب إلى معلم متعلم و متجاس .

- 1 - أكتب  $f(x)$  دون رمز القيمة المطلقة .
- 2 - أدرس تغيرات الدالة  $f$  .
- 3 - بين أن المستقيمان  $(\Delta) : y = x+1$  و  $(\Delta') : y = -x-1$  مقاربين للمنحنى (C) عند  $+\infty$  و  $-\infty$  على الترتيب .

4 - أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .

5 - بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-1 ; 1[$

## الحل - 71

$$f(x) = \begin{cases} x+1 + \frac{x}{x^2-1} & : x+1 \geq 0 \\ -x-1 + \frac{x}{x^2-1} & : x+1 < 0 \end{cases} \quad -1$$

$$= \begin{cases} x+1 + \frac{x}{x^2-1} & : x \in [-1 ; +\infty[ \\ -x-1 + \frac{x}{x^2-1} & : x \in ]-\infty ; -1[ \end{cases}$$

2 - التغيرات :

$$D_f = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ \text{ أي } R - \{-1 ; 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x-1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -x-1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow 0} -(-1)-1 + \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x+1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow 0} -1+1 + \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow 0} 1+1 + \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \rightarrow 0} 1+1 + \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in ]-1 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ \\ -1 + \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in ]-\infty ; -1[ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in ]-1 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ \\ -\left(1 + \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right) & : x \in ]-\infty ; -1[ \end{cases}$$

إشارة  $f'(x)$  :

$$f'(x) < 0 \text{ : إذن } f'(x) = -\left(1 + \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right) \text{ لدينا : } ]-\infty ; -1[$$

$$1 + \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} > 0 \quad \text{لأن}$$

على المجال  $]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  لدينا  $f'(x) = 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$  لندرس إشارتها

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \leq 1$$

$$\begin{aligned} (x^2-1)^2 > 0 \quad \text{و} \quad 1+x^2 > 0 \quad \text{لأن} \quad &\Leftrightarrow 1+x^2 \leq (x^2-1)^2 \\ &\Leftrightarrow 1+x^2 \leq x^4 - 2x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2-3) \geq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2$			+	0	+	
$x^2-3$	+	0		-	0	+
الجداء	+	0	-	0	-	+

إذن على المجال  $]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  لدينا :

x	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	-	+

خلاصة : إشارة  $f'(x)$  على مجموعة تعريف الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها :

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$f(\sqrt{3})$	$+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x-1)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x-1 + \frac{x}{x^2-1} \right) - (-x-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2-1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad -3$$

إذن المستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة  $y = -x-1$  مقارب للمنحنى (C) عند  $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x+1 + \frac{x}{x^2-1} \right) - (x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x+1$  مقارب للمنحنى (C) عند  $+\infty$

4 - وضعية  $(\Delta)$  بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  :

على المجال  $] -1 ; +\infty[$  :  $f(x) - (x+1) = \frac{x}{x^2-1}$

x	-1	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$x^2 - 1$		-		+
$\frac{x}{x^2-1}$	+	0	-	+

لما  $] -1 ; 0[ \cup ] 1 ; +\infty[$  :  $f(x) - (x+1) > 0$  : إذن (C) فوق  $(\Delta)$

لما  $x = 0$  :  $f(x) - (x+1) = 0$  : إذن (C) يقطع  $(\Delta)$

لما  $] 0 ; 1[$  :  $f(x) - (x+1) < 0$  : إذن (C) تحت  $(\Delta)$

على المجال  $] -\infty ; -1[$  :  $f(x) - (-x-1) = \frac{x}{x^2-1}$

x	$-\infty$	-1
x	-	-
$x^2 - 1$	+	
$\frac{x}{x^2-1}$	-	

لما  $] -\infty ; -1[$  :  $f(x) - (-x-1) < 0$  : إذن (C) تحت  $(\Delta')$

5 - من جدول تغيرات الدالة f نستنتج مايلي :

$f$  مستمرة على  $] -1 ; 1[$

$f$  متناقصة تماما على  $] -1 ; 1[$

$f$  تأخذ قيم موجبة ثم قيم سالبة إذن تمر بالعدد 0 .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $] -1 ; 1[$  حيث  $f(\alpha) = 0$

## القسمة في $\mathbb{Z}$

### 1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

**تعريف:**  $a$  و  $b$  عدنان صحيحان حيث  $a$  غير معدوم .  
عول أن  $a$  يقسم  $b$  إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح  $k$  حيث  $b = ak$  (نقول أيضا أن  $a$  قاسم لـ  $b$  و أن  $b$  مضاعف لـ  $a$ )

إذا كان  $a$  يقسم  $b$  نكتب  $a|b$  و نقرأ  $a$  يقسم  $b$

أمثلة :  $6|48$  ؛  $-8|48$  ؛  $4|-48$  ؛  $-2|-48$

**ملاحظة:** إذا كان  $a|b$  في  $\mathbb{Z}$  فإن  $a|-b$  إذن  $b$  و  $(-b)$  لهما نفس القواسم  
خواص :

$a$  و  $b$  عدنان صحيحان حيث  $a \neq 0$

(1) إذا كان  $a|b$  فإن من أجل كل عدد صحيح  $m$   $a|mb$

(2) إذا كان  $a|b$  فإن من أجل كل عدد صحيح غير معدوم  $m$   $ma|mb$

### نشاط - 1

عين الأعداد الصحيحة  $n$  حيث  $11$  يقسم  $(n+5)$

### الحل - 1

$11|n+5$  إذا و فقط إذا وجد  $k \in \mathbb{Z}$  حيث :  $n+5 = 11k$  أي  $n = 11k - 5$

نتيجة : الأعداد الصحيحة  $n$  حيث  $11|n+5$  هي كل الأعداد الصحيحة التي تكتب من الشكل  $n = 11k - 5$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

### نشاط - 2

عين الأعداد الصحيحة  $n$  حيث العدد  $3n+5$  يقسم  $8$

### الحل - 2

نعلم أن قواسم  $8$  هي  $\{1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8\}$

إذن : يكون  $8|3n+5$  إذا و فقط إذا كان  $3n+5=1$  أو  $3n+5=2$  أو  $3n+5=4$  أو  $3n+5=8$  أو

$3n+5=-1$  أو  $3n+5=-2$  أو  $3n+5=-4$  أو  $3n+5=-8$

أي  $n = \frac{1-5}{3}$  أو  $n = \frac{2-5}{3}$  أو  $n = \frac{4-5}{3}$  أو  $n = \frac{8-5}{3}$  أو  $n = \frac{-1-5}{3}$  أو  $n = \frac{-2-5}{3}$  أو  $n = \frac{-4-5}{3}$

أو  $n = \frac{-8-5}{3}$

أي  $n = -4/3$  (مرفوض) أو  $n = -1$  أو  $n = -1/3$  (مرفوض) أو  $n = 1$  أو  $n = -2$  أو  $n = -7/3$

(مرفوض) أو  $n = -3$

نتيجة : يكون  $8|3n+5$  إذا و فقط إذا كان  $n \in \{-1; 1; -2; -3\}$

### نشاط - 3

عين مجموعة الأعداد الصحيحة  $n$  حيث  $3n+8|n+6$

### الحل - 3

$3n+8|3n+18$  لأن  $3n+8|3(n+6)$  إذن :  $3n+8|3n+18$

لدينا :  $3n+8|3n+8$  لأن  $3n+8 = 1(3n+8)$  (1)

و  $3n+8|3n+18$  إذن :  $3n+18 = k'(3n+8)$  حيث  $k' \in \mathbb{Z}$  (2)

ب طرح (1) من (2) نحصل على :  $3n+18 - (3n+8) = k'(3n+8) - (3n+8)$

$$10 = (k' - 1)(3n + 8) \quad \text{أي :}$$

$$3n + 8 \mid 10 \quad \text{أي :}$$

$$3n + 8 \in \{1; 2; 5; 10; -1; -2; -5; -10\} \quad \text{منه :}$$

$$\begin{array}{llll} n = -3 & \text{إذن } 3n + 8 = -1 & \text{مرفوض } n = -7/3 & \text{إذن } 3n + 8 = 1 \\ n = -10/3 & \text{إذن } 3n + 8 = -2 & n = -2 & \text{إذن } 3n + 8 = -2 \\ n = -13/3 & \text{إذن } 3n + 8 = -5 & n = -1 & \text{إذن } 3n + 8 = 5 \\ n = -6 & \text{إذن } 3n + 8 = -10 & \text{مرفوض } n = 2/3 & \text{إذن } 3n + 8 = 10 \end{array}$$

نتيجة : يكون  $3n + 8 \mid n + 6$  إذا و فقط إذا كان  $n \in \{-2; -1; -3; -6\}$  خاصية أساسية :

$a \neq 0$  ،  $b$  ،  $c$  أعداد صحيحة حيث

إذا كان  $a \mid b$  و  $a \mid c$  فإن  $a \mid bm + cn$  حيث  $m$  و  $n$  أعداد صحيحة كيفية

مثال :  $n$  عدد صحيح . نضع  $\begin{cases} a = 5n - 2 \\ b = 2n + 3 \end{cases}$

اثبت أن كل قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  هو قاسم أيضا للعدد 19

الحل : ليكن  $k$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  إذن  $\begin{cases} k \mid 5n - 2 \\ k \mid 2n + 3 \end{cases}$

منه : حسب الخاصية الأساسية :  $k \mid 2(5n - 2) + (-5)(2n + 3)$

$$k \mid 10n - 4 - 10n - 15 \quad \text{أي :}$$

$$\text{أي : } k \mid -19 \quad \text{منه } k \mid 19 \quad \text{و هو المطلوب}$$

نشاط : عين الأعداد الصحيحة  $a$  و  $b$  حيث  $4a^2 - b^2 = 15$

الحل :  $4a^2 - b^2 = 15$  أي  $(2a - b)(2a + b) = 15$

$$\left. \begin{array}{l} 4a = 16 \\ b = 15 - 2a \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 4a = 8 \\ b = 5 - 2a \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 4a = 8 \\ b = 3 - 2a \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 4a = 16 \\ b = 1 - 2a \end{array} \right\} \text{أي :}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a - b = 1 \\ 2a + b = 15 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 2a - b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 2a - b = 5 \\ 2a + b = 3 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 2a - b = 15 \\ 2a + b = 1 \end{array} \right\} \text{أي :}$$

$$\left. \begin{array}{l} (2a - b)(2a + b) = 1 \times 15 \\ (2a - b)(2a + b) = 3 \times 5 \\ (2a - b)(2a + b) = 5 \times 3 \\ (2a - b)(2a + b) = 15 \times 1 \end{array} \right\} \text{منه :}$$

$$\left. \begin{array}{l} b = 7, a = 4 \\ b = 1, a = 2 \\ b = -1, a = 2 \\ b = -7, a = 4 \end{array} \right\} \text{أي :}$$

$$(a; b) \in \{(4; 7); (2; 1); (2; -1); (4; -7)\} \quad \text{منه}$$

نتيجة : مجموعة الثنائيات المرتبة  $(a; b)$  من  $Z^2$  حيث  $4a^2 - b^2 = 15$  هي :

$$\{(4; 7); (2; 1); (2; -1); (4; -7); (-4; -7); (-2; -1); (-2; 1); (-4; 7)\}$$

ملاحظة : الحلول الأربعة الأخرى ناتجة بضرب العددين  $a$  و  $b$  في  $(-1)$  لأن العدد 15 يكتب أيضا من الشكل  $1 \times -15$  أو  $-1 \times -5$  أو  $-3 \times -5$  أو  $-5 \times -3$  أو  $-15 \times -1$  و عليه كل جمل المعادلات السابقة تضرب في  $(-1)$

2 - القسمة الإقليدية في  $Z$

مبرهنة :

$a$  عدد صحيح و  $b$  عدد طبيعي غير معدوم

توجد ثنائية مرتبة و حيدة  $(q; r)$  من  $Z \times N$  حيث  $a = bq + r$  و  $0 \leq r < b$

عملية البحث عن الثنائية الوحيدة  $(q; r)$  تسمى القسمة الإقليدية في  $Z$



العدد  $a$  يسمى حاصل هذه القسمة الإقليدية و  $r$  يسمى باقي القسمة الإقليدية  
**مثال :**  $a$  عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 6 . عين باقي قسمة  $a$  على 5  
**الحل :** باقي قسمة  $a$  على 10 هو 6 إلى  $a = 10q + 6$  حيث  $q \in \mathbb{Z}$

$$a = 2 \times 5q + 5 + 1 \quad \text{منه :}$$

$$a = 5(2q + 1) + 1 \quad \text{أي :}$$

$$q' = 2q + 1 \quad \text{بضع} \quad q' \in \mathbb{Z} \quad \text{إذن}$$

$$a = 5q' + 1 \quad \text{منه :}$$

$$\text{إذن : باقي قسمة } a \text{ على } 5 \text{ هو } 1$$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين

$a$  و  $b$  عدنان طبيعيين غير معدومان .

نرمز بـ  $D_a$  و  $D_b$  إلى مجموعات قواسم العددين  $a$  و  $b$  على الترتيب .

**تعريف :**

أكبر عنصر من المجموعة  $D_a \cap D_b$  يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  و نرمز له بـ  $\text{PGCD}(a; b)$

**ملاحظة :**  $\text{PGCD}$  يعني : أكبر قاسم مشترك (Plus Grand Commun Diviseur)

حذار !  $D_0 = \mathbb{N}^*$  (قواسم 0 هي كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة)

$$\text{مثال : } D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$D_{32} = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$$

$$D_{12} \cap D_{32} = \{1; 2; 4\}$$

$$\text{PGCD}(12; 32) = 4$$

**خواص :**

الخاصية (1) :  $a \geq b$  عدنان طبيعيين غير معدومين . حيث

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r) \quad \text{إذا كان } r \text{ هو باقي القسمة الإقليدية لـ } a \text{ على } b \text{ فإن}$$

نتيجة مباشرة : (خوارزمية إقليدس)

**مثال :** لنبحث عن  $\text{PGCD}(32; 12)$  كما يلي :

$$\text{PGCD}(32; 12) = \text{PGCD}(12; 8) \quad \text{إذن : حسب الخاصية (1)} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 12 \\ -24 & 8 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$\text{PGCD}(12; 8) = \text{PGCD}(8; 4) \quad \text{إذن : } \begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ -08 & 4 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\text{PGCD}(8; 4) = 4 \quad \text{إذن : } \begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ -0 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$$\text{نتيجة : } \text{PGCD}(32; 12) = \text{PGCD}(12; 8) = \text{PGCD}(8; 4) = 4$$

هذه الطريقة للبحث عن القاسم المشترك الأكبر تسمى خوارزمية إقليدس

إذن : القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين  $a$  و  $b$  هو آخر باقي قسمة غير معدوم من عمليات القسمة في خوارزمية إقليدس :

**نشاط :** باستعمال خوارزمية إقليدس عين  $\text{PGCD}(150; 108)$

إستنتج ثنائية  $(x; y)$  من  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  حيث  $150x + 108y = 6$

**الحل :**

$$\begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & 18 \\ 18 & 6 \\ \hline 6 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 42 & 24 \\ 24 & 18 \\ \hline 18 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 108 & 42 \\ 84 & 24 \\ \hline 24 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 150 & 108 \\ 108 & 42 \\ \hline 42 & \end{array}$$

الباقي الرابع

الباقي الثالث

الباقي الثاني

الباقي الأول

نتيجة : آخر باقي غير معدوم هو الباقي الرابع الذي يساوي 6

$$\text{إذن : } \text{PGCD}(150; 108) = 6$$

حسب عمليات القسمة المتتالية من خوارزمية إقليدس السابقة نستنتج الكتابات التالية للباقي :

$$1 = 150 - (108) \quad (1)$$

$$(2) \dots\dots\dots 108 - (42) 2 = 24$$

$$(3) \dots\dots\dots 42 - (24) 1 = 18$$

$$(4) \dots\dots\dots 24 - (18) 1 = 6$$

$$24 \quad [42 - 24(1)] = 6 \quad \text{نعوض 18 في المساواة (4) :}$$

$$24 - 42 + 24 = 6 \quad \text{أي}$$

$$(5) \dots\dots\dots - 42 + 24(2) = 6 \quad \text{أي}$$

نعوض كل من (2) و (1) في المساواة (5) نحصل على :

$$- [150 - 108] + [108 - 42(2)](2) = 6$$

$$- 150 + 108 + 108(2) - 42(4) = 6 \quad \text{أي}$$

$$(6) \dots\dots\dots - 150 + 108(3) - 42(4) = 6 \quad \text{أي}$$

نعوض (1) في (6) نحصل على :

$$- 150 + 108(3) - 4[150 - 108] = 6$$

$$- 150 + 108(3) - 150(4) + 108(4) = 6 \quad \text{أي}$$

$$150(-5) + 108(7) = 6 \quad \text{أي هو المطلوب}$$

إذن : الثنائية  $(x; y)$  المطلوبة هي  $(-5; 7)$

الخاصية (2) :  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين غير معدومان .

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $k$  فإن  $\text{PGCD}(k a; k b) = k \times \text{PGCD}(a; b)$

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

إذا كان  $a$  و  $b$  عدنان صحيحان غير معدومان فإن  $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(|a|; |b|)$

إذن : من أجل كل ثلاث أعداد صحيحة غير معدومة  $a; b; c$  فإن :

$$\text{PGCD}(k a; k b) = |k| \text{PGCD}(a; b)$$

الأعداد الأولية فيما بينها

تعريف :  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين غير معدومين .

نقول أن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا كان  $\text{PGCD}(a; b) = 1$

نتيجة :  $a; b; a'; b'$  أعداد طبيعية غير معدومة

إذا كان  $a = d a'$  و  $b = d b'$  و  $\text{PGCD}(a'; b') = 1$  فإن  $\text{PGCD}(a; b) = d$

و العكس صحيح إذا كان  $\text{PGCD}(a; b) = d$  و  $a = d a'$  و  $b = d b'$  فإن  $\text{PGCD}(a'; b') = 1$

مثال : عين كل الثنائيات  $(a; b)$  من  $N^* \times N^*$  حيث :

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 66 \\ \text{PGCD}(a; b) = 6 \end{array} \right\} \quad \text{الحل :}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 6 a' \\ b = 6 b' \end{array} \right\} \quad \text{إذن : } \text{PGCD}(a; b) = 6$$

$$\text{PGCD}(a'; b') = 1$$

$$6 a' + 6 b' = 66 \quad \text{منه : المساواة } a + b = 66 \text{ تصبح}$$

$$a' + b' = 11 \quad \text{أي}$$

إذن نميز الحالات التالية :

$a'$	$b'$	$\text{PGCD}(a'; b')$	$a = 6 a'$	$b = 6 b'$
1	10	1	6	60
2	9	1	12	54
3	8	1	18	48
4	7	1	24	42
5	6	1	30	36
6	5	1	36	30
7	4	1	42	24
8	3	1	48	18
9	2	1	54	12
10	1	1	60	6

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي :  $\{(6; 60); (12; 54); (18; 48); (24; 42); (30; 36); (36; 30); (42; 24); (48; 18); (54; 12); (60; 6)\}$

نشاط :

- 1 - أنشر العبارة  $(n+3)(3n^2-9n+16)$  حيث  $n \in \mathbb{N}$
- 2 - استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون العدد  $3n^3-11n+48$  قابل للقسمة على  $n+3$

3 - بين أن من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  :  $3n^2-9n+16$  هو عدد طبيعي غير معدوم

4 - بين أن من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة  $a; b; c$  فإن :

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(bc - a; b)$$

5 - بين أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر من 1 فإن :

$$\text{PGCD}(3n^3-11n; n+3) = \text{PGCD}(48; n+3)$$

6 - عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48

7 - استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها  $A = \frac{3n^3-11n}{n+3}$  عدد طبيعي

الحل :

$$\begin{aligned} (n+3)(3n^2-9n+16) &= 3n^3-9n^2+16n+9n^2-27n+48 \\ &= 3n^3-11n+48 \end{aligned}$$

1 -

2 - لدينا  $n \in \mathbb{N}$  إذن :  $(n+3) \in \mathbb{N}$  و  $(3n^2-9n+16) \in \mathbb{Z}$

إذن :  $(n+3) | (3n^3-11n+48)$  معناه  $3n^3-11n+48 = (n+3)(3n^2-9n+16)$

أي : العدد  $3n^3-11n+48$  قابل للقسمة على  $(n+3)$

3 - لدينا  $n \in \mathbb{N}$  إذن :  $3n^2-9n+16 \in \mathbb{Z}$  إذن : يكفي أن نبرهن أن  $3n^2-9n+16 > 0$

لندرس إشارة كثير الحدود  $p(x) = 3x^2-9x+16$  على  $\mathbb{R}$

$$\Delta = 81 - 4(3)(16) = 81 - 192 = -111$$

إذن : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $p(x) > 0$

منه :  $3n^2-9n+16 > 0$  من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$

إذن :  $3n^2-9n+16 \in \mathbb{N}^*$

4 - ليكن  $d$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$

$$\left. \begin{array}{l} d|a \\ d|b \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} d|-a \\ d|cb \end{array} \right\} \text{ إذن : } d|cb-a \quad (1)$$

ليكن الآن  $d$  قاسم مشترك لـ  $b$  و  $cb-a$

$$\left. \begin{array}{l} d|b \\ d|cb-a \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} d|bc \\ d|-bc+a \end{array} \right\} \text{ منه : } d|bc-bc+a \text{ أي } d|a \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن  $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(cb-a; b)$

5 - باستعمال نتيجة السؤال (4) من أجل  $\left. \begin{array}{l} a=48 \\ b=n+3 \\ c=3n^2-9n+16 \end{array} \right\}$  نحصل على :

$$\text{PGCD}(48; n+3) = \text{PGCD}((n+3)(3n^2-9n+16)-48; n+3)$$

$$\text{PGCD}(48; n+3) = \text{PGCD}(3n^3-11n+48-48; n+3)$$

أي :

$$\text{PGCD}(48; n+3) = \text{PGCD}(3n^3-11n; n+3)$$

أي

$$D_{48} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$$

6 - قواسم 48 هي :

7 - يكون  $A \in \mathbb{N}$  إذا وفقط إذا كان  $n+3 | 3n^3-11n$  أي  $\text{PGCD}(3n^3-11n; n+3) = n+3$

$$\text{PGCD}(48; n+3) = n+3$$

أي

$$n+3 | 48$$

أي

$$n+3 \in D_{48}$$

أي

$$n \in \{0; 1; 3; 5; 9; 13; 21; 45\}$$

منه :

$$n \in \{3; 5; 9; 13; 21; 45\}$$

لكن  $n > 1$  إذن :

ميراثة بيزو :

يكون عدنان صحيحان  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا وجدت ثنائية  $(\alpha; \beta)$  من الأعداد الصحيحة حيث  $\alpha a + \beta b = 1$

مثال :  $a=5$  ;  $b=3$

$$5(-4) + 3(7) = -20 + 21 = 1$$

إن : توجد ثنائية  $(\alpha; \beta) = (-4; 7)$  تحقق  $5\alpha + 3\beta = 1$   
 إن :  $5$  و  $3$  أوليان فيما بينهما .

## تمارين الكتاب المدرسي

### التمرين 1

عين مجموعة القواسم الطبيعية للأعداد 24 و 75 و 20

#### الحل 1

$$D_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

$$D_{75} = \{1; 3; 5; 15; 25; 75\}$$

$$D_{20} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$$

### التمرين 2

عين كل الثنائيات  $(a; b)$  من  $N \times N$  حيث  $ab = 39$

#### الحل 2

$$D_{39} = \{1; 3; 13; 39\}$$

لدينا :

إن :

$$\begin{cases} a=1 & \text{أو} & b=39 \\ a=3 & \text{أو} & b=13 \\ a=13 & \text{أو} & b=3 \\ a=39 & \text{أو} & b=1 \end{cases}$$

$$(a; b) \in \{(1; 39); (3; 13); (13; 3); (39; 1)\}$$

### التمرين 3

عين كل الثنائيات  $(x; y)$  من الأعداد الصحيحة حيث  $x^2 - y^2 = 15$

#### الحل 3

لدينا مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 15 هي :  $D_{15} = \{1; 3; 5; 15; -1; -3; -5; -15\}$   
 لدينا أيضا :

$$x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 15$$

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x-y=15 \\ x+y=1 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x-y=5 \\ x+y=3 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x-1=3 \\ x+y=5 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x-y=1 \\ x+y=15 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} x-y=-15 \\ x+y=-1 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x-y=-5 \\ x+y=-3 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x-y=-3 \\ x+y=-5 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x-y=-1 \\ x+y=-15 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \text{إن :} \\ \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2x=16 \\ y=1-x \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 2x=8 \\ y=3-x \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 2x=8 \\ y=5-x \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 2x=16 \\ y=15-x \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} 2x=-16 \\ y=-1-x \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 2x=-8 \\ y=-3-x \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 2x=-8 \\ y=-5-x \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} 2x=-16 \\ y=-15-x \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} x=8 \\ y=-7 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=4 \\ y=-1 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=4 \\ y=1 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=8 \\ y=7 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} x=-8 \\ y=7 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=-4 \\ y=1 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=-4 \\ y=-1 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=-8 \\ y=-7 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \text{أي :} \\ \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x=8 \\ y=7 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=-8 \\ y=7 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} x=4 \\ y=-1 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=-4 \\ y=-1 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} x=4 \\ y=1 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=-4 \\ y=1 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} x=8 \\ y=7 \end{array} \right\} \text{أو} \left. \begin{array}{l} x=-8 \\ y=-7 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \text{أي :}$$

نتيجة : الثنائيات هي :  $\{(8; 7); (4; 1); (4; -1); (8; -7); (-8; -7); (-4; -1); (-4; 1); (-8; 7)\}$

## التمرين 4 -

1 - أنشر العبارة  $(x-2)(y-3)$ 2 - استنتج الثنائيات  $(x; y)$  من  $Z \times Z$  التي تحقق  $xy = 3x + 2y$ 

## الحل - 4

$$(x-2)(y-3) = xy - 3x - 2y + 6$$

$$(x-2)(y-3) = xy - 3x - 2y + 6$$

$$(x-2)(y-3) = xy - (3x + 2y) + 6$$

منه : إذا كان  $xy = 3x + 2y$  فإن  $(x-2)(y-3) = 6$  لأن  $xy - (3x + 2y) = 0$

$$y-3=6 \text{ و } x-2=1$$

أو

$$y-3=3 \text{ و } x-2=2$$

أو

$$y-3=2 \text{ و } x-2=3$$

أو

$$y-3=1 \text{ و } x-2=6$$

أو

$$y-3=-6 \text{ و } x-2=-1$$

أو

$$y-3=-3 \text{ و } x-2=-2$$

أو

$$y-3=-2 \text{ و } x-2=-3$$

أو

$$y-3=-1 \text{ و } x-2=-6$$

أي :

$$(x; y) \in \{(3; 9); (4; 6); (5; 5); (8; 4); (1; -3); (0; 0); (-1; 1); (-4; 2)\}$$

## التمرين 5 -

حل في  $Z^2$  المعادلة  $x^2 = 4y^2 + 3$ 

## الحل - 5

$$x^2 = 4y^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x+2y) = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \text{ و } x+2y=3 \\ \text{أو} \\ x-2y=3 \text{ و } x+2y=1 \\ \text{أو} \\ x-2y=-1 \text{ و } x+2y=-3 \\ \text{أو} \\ x-2y=-3 \text{ و } x+2y=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ و } y=1/2 \text{ مرفوض} \\ \text{أو} \\ x=2 \text{ و } y=-1/2 \text{ مرفوض} \\ \text{أو} \\ x=-2 \text{ و } y=-1/2 \text{ مرفوض} \\ \text{أو} \\ x=-2 \text{ و } y=1/2 \text{ مرفوض} \end{cases}$$

نتيجة : المعادلة  $x^2 = 4y^2 + 3$  لا تقبل حلولاً في  $Z^2$

## التمرين 6 -

حل في  $Z^2$  المعادلة  $5xy - y^2 = 49$ 

## الحل - 6

$$5xy - y^2 = 49 \Leftrightarrow y(5x - y) = 49$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ و } 5x - y = 49 \\ \text{أو} \\ y = 7 \text{ و } 5x - y = 7 \text{ مرفوض} \\ \text{أو} \\ y = 49 \text{ و } 5x - y = 1 \\ \text{أو} \\ y = -1 \text{ و } 5x - y = -49 \\ \text{أو} \\ y = -7 \text{ و } 5x - y = -7 \text{ مرفوض} \\ \text{أو} \\ y = -49 \text{ و } 5x - y = -1 \end{cases}$$

$$(x; y) \in \{(10; 1); (10; 49); (-10; -1); (-10; -49)\} \quad \text{إذن :}$$

التمرين 7 =

ماهي عدد مضاعفات العدد 53 و المحصورة بين 1027 - و 1112

الحل = 7

ليكن  $x$  مضاعف 53 إذن :  $x = 53k$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ 

$$-1027 \leq x \leq 1112 \quad \text{إذن :} \quad -1027 \leq 53k \leq 1112$$

$$\frac{-1027}{53} \leq k \leq \frac{1112}{53} \quad \text{إذن :}$$

$$-19,37 \leq k \leq 20,98 \quad \text{أي}$$

بما أن  $k \in \mathbb{Z}$  فإن عدد قيم  $k$  هو 40 (من 19 - إلى 20)

إذن : يوجد 40 مضاعف للعدد 53 محصور بين 1027 - و 1112

التمرين 8 =

عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة  $a$  حيث 7 قاسم لـ  $a$  و  $a < 50$ 

الحل = 8

 $a$  هو مضاعف 7 الأصغر من 50 و الأكبر من 0

$$a \in \{7; 14; 21; 28; 35; 42; 49\} \quad \text{إذن :}$$

التمرين 9 =

ماهي الكسور المساوية لـ  $\frac{33}{21}$  و التي مقام كل منها عدد طبيعي أصغر تماماً من 50

الحل = 9

ليكن  $\frac{x}{y}$  هذا الكسر حيث  $0 < y < 50$ 

$$21x = 33y \quad \text{لدينا :} \quad \frac{x}{y} = \frac{33}{21} \quad \text{منه :}$$

$$7x = 11y \quad \text{أي :}$$

$$\alpha \in \mathbb{N}^* \quad \text{منه :} \quad x = 11\alpha \quad \text{و} \quad y = 7\alpha \quad \text{حيث}$$

$$0 < y < 50 \quad \text{إذن :} \quad 0 < 7\alpha < 50$$

$$0 < \alpha < 50/7 \quad \text{منه} \quad y = 7\alpha$$

$$0 < \alpha < 7,1$$

$$\alpha \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$y \in \{7; 14; 21; 28; 35; 42; 49\} \quad \text{منه :}$$

$$x \in \{11; 22; 33; 44; 55; 66; 77\} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{33}{21} = \frac{11}{7} = \frac{22}{14} = \frac{44}{28} = \frac{55}{35} = \frac{66}{42} = \frac{77}{49}$$

نتيجة :

التمرين 10 =

عين كل الأعداد الصحيحة  $n$  التي من أجلها 13 قاسم لـ  $n+4$  و  $|n| \leq 22$

الحل - 10

$$-22 \leq n \leq 22 \quad \text{إذن} \quad |n| \leq 22$$

$$\text{منه} \quad -18 \leq n+4 \leq 26$$

إذن : نبحث عن مضاعفات 13 المحصورة بين -18 و 26

$$(n+4) \in \{-13; 0; 13; 26\}$$

منه

$$n \in \{-17; -4; 9; 22\}$$

أي :

التمرين - 11

عين كل الأعداد الصحيحة  $n$  حتى يكون  $5n+7$  قابلاً لـ 12

الحل - 11

$$5n+7 \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\} \quad \text{إذن} \quad 12 \mid 5n+7$$

$$5n \in \{-6; -5; -4; -3; -1; 5; -8; -9; -10; -11; -13; -19\} \quad \text{منه}$$

$$n \in \{-1; 1; -2\}$$

أي

التمرين - 12

عين الأعداد الطبيعية  $n$  غير المعدومة حيث يكون العدد  $n+6$  قابلاً للقسمة على  $n$

الحل - 12

يكون  $n+6$  قابلاً للقسمة على  $n$  إذا وفقط إذا وجد  $k$  من  $N$  حيث  $n+6=nk$

$$n(k-1)=6 \quad \text{منه} \quad nk-n=6$$

$$n \mid 6$$

$$\text{أي} \quad n \in \{1; 2; 3; 6\}$$

التمرين - 13

1 - عين الأعداد الصحيحة  $n$  حيث يكون  $5n+6$  يقسم 34

2 - عين الأعداد الصحيحة  $n$  التي من أجلها  $5n+6$  قاسم لـ  $n+8$

الحل - 13

$$5n+6 \mid 34 \Rightarrow 5n+6 \in \{1; 2; 17; 34; -1; -2; -17; -34\} \quad -1$$

$$\Rightarrow 5n \in \{-5; -4; 11; 28; -7; -8; -23; -40\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-1; -8\}$$

$$5n+6 \mid n+8 \Rightarrow 5n+6 \mid 5(n+8) \quad -2$$

$$\Rightarrow 5n+6 \mid 5n+40$$

بإجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 5n+40 & 5n+6 \\ \underline{5n+6} & 1 \\ 34 & \end{array}$$

$$5n+40 = 1 + \frac{34}{5n+6} \quad \text{إذن} :$$

منه : يكون  $5n+6$  قاسم لـ  $5n+40$  إذا وفقط إذا كان  $5n+6 \mid 34$

أي  $n \in \{-1; -8\}$  حسب السؤال (1)

التمرين - 14

$n$  عدد صحيح . نضع  $a=3n+7$  و  $b=n+1$

أثبت أن إذا كان  $d$  قاسم لـ  $a$  وقاسم لـ  $b$  فإن  $d$  قاسم للعدد 4

الحل - 14

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid 3b \end{cases} \Rightarrow d \mid a-3b \Rightarrow d \mid 3n+7-(3n+3) \Rightarrow d \mid 4$$

التمرين - 15

$n$  عدد صحيح . نضع  $x=3n+7$  و  $y=7n+2$

أثبت أن إذا كان  $\Delta$  قاسم لـ  $x$  و  $y$  فإن  $\Delta$  قاسم لـ 43

الحل - 15

$$\begin{cases} \Delta | x \\ \Delta | y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta | 7x \\ \Delta | 3y \end{cases} \Rightarrow \Delta | 7x - 3y \Rightarrow \Delta | 7(3n+7) - 3(7n+2) \Rightarrow \Delta | 49 - 6 \Rightarrow \Delta | 43$$

التمرين - 16

ليكن  $a$  و  $b$  عدنان صحيحان .

برهن أن إذا كان  $a^2 + b^2$  يقسم 2 فإن  $(a+b)^2$  يقسم 2

الحل - 16

$a$  يقسم  $a^2 + b^2$  إذن : يوجد  $k$  من  $Z$  حيث  $a^2 + b^2 = 2k$

منه :  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 2k + 2ab = 2(k+ab)$

أي 2 يقسم  $(a+b)^2$

التمرين - 17

$a$  و  $b$  عدنان صحيحان

1 - أثبت العبارة  $(a+b)^3$

2 - أثبت أن إذا كان  $a^3 + b^3$  يقسم 3 فإن  $(a+b)^3$  يقسم 3

الحل - 17

1 -

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2 + b^2 + 2ab)$$

$$= a^3 + ab^2 + 2a^2b + ba^2 + b^3 + 2ab^2$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$$

2 - إذا كان  $a^3 + b^3$  يقسم 3 فإن يوجد  $k$  من  $Z$  حيث  $a^3 + b^3 = 3k$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$$

منه :

$$a^3 + b^3 = 3k \quad \text{لأن} \quad (a+b)^3 = 3k + 3ab^2 + 3a^2b$$

أي :

$$(a+b)^3 = 3(k + ab^2 + a^2b)$$

أي :

أي 3 يقسم  $(a+b)^3$

التمرين - 18

عين باقي القسمة الإقليدية لـ  $a$  على  $b$  في الحالات التالية :

$$1 - a = 118 \text{ و } b = 5$$

$$2 - a = -152 \text{ و } b = 7$$

الحل - 18

$$\begin{array}{r} 118 \quad 5 \\ 18 \quad 23 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{إذن : باقي القسمة الإقليدية لـ } 118 \text{ على } 5 \text{ هو } 3 \\ -1 \end{array}$$

$$\text{منه : } 152 = 7(21) + 5$$

$$\text{أي : } -152 = 7(-21) - 5$$

$$\text{أي : } -152 = 7(-21) - 5 + 7 - 7$$

$$\text{أي : } -152 = 7(-22) + 2$$

منه : باقي القسمة الإقليدية لـ  $-152$  على  $7$  هو  $2$

التمرين - 19

عين كل الأعداد الطبيعية  $n$  الأصغر من  $100$  و التي باقي قسمتها على  $41$  هو  $5$

الحل - 19

باقي قسمة  $n$  على  $41$  هو  $5$  إذن :  $n = 41k + 5$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

$$n \leq 100 \quad \text{منه} \quad 41k + 5 \leq 100$$

$$41k \leq 95 \quad \text{أي}$$

$$k \leq 95/41 \quad \text{أي}$$

$$k \in \{0; 1; 2\} \quad \text{أي}$$

نتيجة :  $n \in \{5; 46; 87\}$  لأن  $n = 41k + 5$

التمرين - 20

عين العددين الطبيعيين غير المعدومين  $a$  و  $b$  حيث حاصل القسمة الإقليدية لـ  $a$  على  $b$  هو  $17$  و باقيها هو  $3$  و

$$a - 27 = 23b$$



## تحل - 20

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} a = 17b + 3 \\ a - 27 = 23b \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} a - 17b = 3 \\ a - 23b = 27 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} a - 17b - (a - 23b) = -24 \\ a = 17b + 3 \end{cases} \\
 &\rightarrow \begin{cases} 6b = -24 \\ a = 17b + 3 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = -65 \end{cases}
 \end{aligned}$$

إذن : لا يوجد عدنان طبيعيين  $a$  و  $b$  يحققان الشروط المطلوبة .

## تمرين - 21

$n$  عدد طبيعي باقي قسمته على 7 يساوي باقي قسمته على 3 (القسمة الإقليدية)  
عين القيم الممكنة لـ  $n$

## الحل - 21

$$\begin{aligned}
 &\text{حيث } k \text{ و } p \text{ و } r \text{ أعداد طبيعية و } 0 \leq r < 3 \quad \begin{cases} n = 7k + r \\ n = 3p + r \end{cases} \\
 &\text{إذن : } 7k + r = 3p + r \text{ منه } 7k = 3p
 \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } \begin{cases} k = 3q \\ p = 7q \end{cases} \text{ حيث } q \text{ عدد طبيعي}$$

نتيجة : قيم  $n$  المطلوبة هي الأعداد الطبيعية من الشكل  $n = 7k + r = 7(3q) + r$   
أي  $n = 21q + r$  حيث  $q \in \mathbb{N}$  و  $r \in \{0; 1; 2\}$

## التمرين - 22

عين كل الأعداد الطبيعية  $n$  التي يكون باقي قسمتها على 7 و حاصل قسمتها على 7 متساويان .

## الحل - 22

ليكن  $q$  حاصل قسمة  $n$  على 7 و  $r$  باقي هذه القسمة  
إذن :  $n = 7q + r$  حيث  $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$   
بما أن  $q = r$  فإن  $q \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$   
إذن :  $n \in \{7(0) + 0; 7(1) + 1; 7(2) + 2; 7(3) + 3; 7(4) + 4; 7(5) + 5; 7(6) + 6\}$   
 $n \in \{0; 8; 16; 24; 32; 40; 48\}$   
أي :

## التمرين - 23

عين كل الأعداد الطبيعية  $n$  التي يكون من أجلها الحاصل هو ضعف الباقي عند القسمة الإقليدية لـ  $n$  على 13

## الحل - 23

ليكن  $n = 13q + r$  حيث  $q \in \mathbb{N}$  و  $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$   
 $q = 2r$  إذن :  $q \in \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24\}$   
منه القيم الممكنة لـ  $n$  هي كما يلي :

$r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q = 2r$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$n = 13q + r$	0	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324

## تمرين - 24

$a$  و  $b$  عدنان طبيعيين غير معدومين حيث  $a + b = 416$  و باقي القسمة الإقليدية لـ  $a$  على  $b$  هو 61 .

## حل - 24

$$\begin{aligned}
 &\text{حيث } q \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a + b = 416 \dots\dots\dots (1) \\ a = bq + 61 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \\
 &\begin{array}{r|l} 355 & 5 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}
 \end{aligned}$$

من العلاقة (1) :  $a = 416 - b$ بالتعويض في (2) :  $416 - b = bq + 61$ 

$$416 - 61 = bq + b$$
 منه :

$$355 = b(q + 1)$$
 أي :

منه :  $b$  قاسم لـ 355

$$b \in \{1; 5; 71; 355\}$$
 إذن :

$$(q + 1) \in \{355; 71; 5; 1\}$$
 منه :

$$q \in \{354; 70; 4; 0\}$$
 أي :

نتيجة : قيم  $a$  الممكنة هي :

q	354	70	4	0
b	1	5	71	355
$a = bq + 61$	415	411	345	61

مرفوض مرفوض

نتيجة :  $(a; b) \in \{(345; 71); (61; 355)\}$  لأن  $b > 61$ التمرين 25

باستعمال خوارزمية إقليدس عين PGCD(a; b) في الحالات التالية :

$$(a; b) = (315; 117) \quad - 1$$

$$(a; b) = (1260; 528) \quad - 2$$

الحل - 25

- 1

$$\begin{array}{r|l} 315 & 117 \\ \hline 234 & 2 \\ \hline 81 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 117 & 81 \\ \hline 81 & 1 \\ \hline 36 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 81 & 36 \\ \hline 72 & 2 \\ \hline 9 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 9 \\ \hline 36 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

آخر باقي غير معدوم هو 9 إذن :  $\text{PGCD}(315; 117) = 9$ 

- 2

$$\begin{array}{r|l} 1260 & 528 \\ \hline 1056 & 2 \\ \hline 204 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 528 & 204 \\ \hline 408 & 2 \\ \hline 120 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 204 & 120 \\ \hline 120 & 1 \\ \hline 84 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 120 & 84 \\ \hline 84 & 1 \\ \hline 36 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 84 & 36 \\ \hline 72 & 2 \\ \hline 12 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 12 \\ \hline 36 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

آخر باقي غير معدوم هو 12 إذن :  $\text{PGCD}(1260; 528) = 12$ التمرين 26 $n$  عدد طبيعي غير معدوم1 - ماهو القاسم المشترك الأكبر لـ  $n$  و  $3n$  ؟2 - ماهو القاسم المشترك الأكبر لـ  $n$  و  $n^2$  ؟الحل - 261 -  $n$  قاسم لـ  $3n$  إذن  $\text{PGCD}(n; 3n) = n$ 2 -  $n$  قاسم لـ  $n^2$  إذن  $\text{PGCD}(n; n^2) = n$ التمرين 27برهن أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين  $a$  و  $b$  هي مجموعة قواسم العدد  $\text{PGCD}(a; b)$ الحل - 27لتكن  $D$  مجموعة القواسم المشتركة للعددين  $a$  و  $b$ و لتكن  $d$  مجموعة قواسم العدد  $\text{PGCD}(a; b)$ ليكن  $k$  عنصر من  $D$  إذن :  $k|a$  و  $k|b$ نضع  $q = \text{PGCD}(a; b)$  إذن :  $\left. \begin{array}{l} a = qa' \\ b = qb' \end{array} \right\}$  حيث  $\text{PGCD}(a'; b') = 1$ لدينا  $\left. \begin{array}{l} k|a'q \\ k|b'q \end{array} \right\}$  إذن :  $k|q$  لأن  $\text{PGCD}(a'; b') = 1$

منه :  $k \in d$  ..... (1)ليكن الآن  $\ell$  عنصر من  $d$  إذن :  $\ell | q$ لكن  $q | a$  و  $q | b$ إذن :  $\ell | a$  و  $\ell | b$ إذن :  $\ell \in D$  ..... (2)نتيجة :  $D = d$  و هو المطلوب .التمرين - 28

عين كل القواسم المشتركة للعددين 456 و 792

الحل - 28لنبحث عن  $\text{PGCD}(792; 456)$  كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 792 & 456 \\ \hline 456 & 1 \\ \hline 336 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 456 & 336 \\ \hline 336 & 1 \\ \hline 120 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 336 & 120 \\ \hline 240 & 2 \\ \hline 96 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 120 & 96 \\ \hline 96 & 1 \\ \hline 24 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 96 & 24 \\ \hline 96 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

منه :  $\text{PGCD}(792; 456) = 24$ 

إذن : مجموعة القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 هي مجموعة قواسم العدد 24

و هي :  $D = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$ التمرين - 29

$n$  عدد طبيعي غير معدوم حيث باقي القسمة الإقليدية لـ 4294 و 3521 على  $n$  هما على الترتيب 10 و 11 .  
عين القيم الممكنة لـ  $n$

الحل - 29البواقي هي 10 و 11 إذن :  $n > 11$ 

لدينا :  $\left. \begin{array}{l} 4294 = nq + 10 \\ 3521 = np + 11 \end{array} \right\}$  حيث  $q \in \mathbb{N}^*$  و  $p \in \mathbb{N}^*$

إذن :  $\left. \begin{array}{l} 4284 = np \\ 3510 = nq \end{array} \right\}$

منه :  $\left. \begin{array}{l} n | 4284 \\ n | 3510 \end{array} \right\}$  إذن :  $n$  قاسم مشترك للعددين 4284 و 3510

أي  $n$  ينتمي إلى مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر للعددين 4284 و 3510 كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 4284 & 3510 \\ \hline 3510 & 1 \\ \hline 774 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 3510 & 774 \\ \hline 3096 & 4 \\ \hline 414 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 774 & 414 \\ \hline 414 & 1 \\ \hline 360 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 414 & 360 \\ \hline 360 & 1 \\ \hline 54 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 360 & 54 \\ \hline 324 & 6 \\ \hline 36 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 54 & 36 \\ \hline 36 & 1 \\ \hline 18 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 36 & 18 \\ \hline 36 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن :  $\text{PGCD}(4284; 3510) = 18$ منه :  $n \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ لكن  $n > 11$  إذن  $n = 18$ التمرين - 30 $n$  عدد طبيعي مكون من أربعة أرقامعين العدد  $n$  حيث 37 و 53 هما على الترتيب بواقي القسمة الإقليدية للعددين 21685 و 33509 على  $n$ الحل - 30

$\left. \begin{array}{l} 21685 = np + 37 \\ 33509 = nq + 53 \end{array} \right\}$  حيث  $p \in \mathbb{N}$  ;  $q \in \mathbb{N}$  ;  $n > 53$

$$\left. \begin{array}{l} n | 21648 \\ n | 33456 \end{array} \right\} \text{ منه } \left. \begin{array}{l} 21648 = n p \\ 33456 = n q \end{array} \right\} \text{ إذن :}$$

إذن :  $n$  ينتمي إلى القواسم المشتركة للعدين 21648 و 33456

البحث عن  $\text{PGCD}(21648 ; 33456)$

$$\begin{array}{r|l} 33456 & 21648 \\ \hline 21648 & 1 \\ \hline 11808 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 21648 & 11808 \\ \hline 11808 & 1 \\ \hline 9840 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11808 & 6840 \\ \hline 9840 & 1 \\ \hline 1968 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9840 & 1968 \\ \hline 9840 & 5 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{نتيجة : } \text{PGCD}(21648 ; 33456) = 1968$$

إذن :  $n$  ينتمي إلى مجموعة قواسم 1968

لكن  $n$  يتكون من 4 أرقام إذن  $n = 1968$  لأنه القاسم الوحيد لـ 1968 و الذي يتكون من 4 أرقام .

التمرين 31

$$\text{PGCD}(182 ; 126)$$

2 - باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد عددين صحيحين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $182\alpha + 126\beta = 14$

الحل 31

$$\begin{array}{r|l} 182 & 126 \\ \hline 126 & 1 \\ \hline 56 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 126 & 56 \\ \hline 112 & 2 \\ \hline 14 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 14 \\ \hline 56 & 4 \\ \hline 0 & \end{array} \quad -1$$

$$\text{نتيجة : } \text{PGCD}(182 ; 126) = 14$$

2 - لنكتب بواقي قسمة خوارزمية إقليدس كما يلي :

$$(1) \dots\dots\dots 182 - 126(1) = 56$$

$$(2) \dots\dots\dots 126 - 56(2) = 14$$

نعوض (1) في (2) نحصل على :

$$56 = 182 - 126(1) \quad \text{لأن } 126 - 2[182 - 126(1)] = 14$$

$$126 - 182(2) + 126(2) = 14 \quad \text{أي}$$

$$182(-2) + 126(3) = 14 \quad \text{أي :}$$

$$(\alpha ; \beta) = (-2 ; 3) \quad \text{إذن :}$$

التمرين 32

أحسب باقي قسمة العدد 1399 على 82 ثم إستنتج  $\text{PGCD}(1399 ; 82)$

الحل 32

$$\begin{array}{r|l} 1399 & 82 \\ \hline 82 & 17 \\ \hline 579 & \\ \hline 574 & \\ \hline 005 & \end{array}$$

نتيجة : باقي قسمة 1399 على 82 هو 5

$$\text{إذن : } \text{PGCD}(1399 ; 82) = \text{PGCD}(82 ; 5)$$

أي :  $\text{PGCD}(1399 ; 82) = 1$  لأن 82 و 5 أوليان فيما بينهما .

التمرين 33

$$\text{PGCD}(-350 ; -252)$$

الحل 33

$$\text{PGCD}(-350 ; -252) = \text{PGCD}(350 ; 252)$$

$$\begin{array}{r|l} 350 & 252 \\ \hline 252 & 1 \\ \hline 98 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 252 & 98 \\ \hline 196 & 2 \\ \hline 56 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 98 & 56 \\ \hline 56 & 1 \\ \hline 42 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 42 \\ \hline 42 & 1 \\ \hline 14 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 42 & 14 \\ \hline 42 & 3 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{إذن :}$$

$$\text{نتيجة : } \text{PGCD}(350 ; 252) = 14$$

$$\text{PGCD}(-350 ; -252) = 14 \quad \text{إذن :}$$

التمرين 34

عين  $\text{PGCD}(54 ; 82)$  ثم إستنتج  $\text{PGCD}(5400 ; 8200)$

## الحل - 34

$$\begin{array}{r|l} 82 & 54 \\ \hline 54 & 1 \\ \hline 28 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 54 & 28 \\ \hline 28 & 1 \\ \hline 26 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 28 & 26 \\ \hline 26 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \hline 26 & 13 \\ \hline 0 & \end{array}$$

نتيجة :  $\text{PGCD}(54; 82) = 2$ 

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(5400; 8200) &= \text{PGCD}(54 \times 100; 82 \times 100) \\ &= 100 \times \text{PGCD}(54; 82) \\ &= 100 \times 2 \\ &= 200 \end{aligned}$$

## التمرين - 35

عين كل الثنائيات  $(a; b)$  من الأعداد الطبيعية حيث  $\begin{cases} a + b = 72 \\ \text{PGCD}(a; b) = 9 \end{cases}$ 

## الحل - 35

$$\left. \begin{array}{l} y \in \mathbb{N} ; x \in \mathbb{N} \\ \text{PGCD}(x; y) = 1 \end{array} \right\} \text{ حيث } \left. \begin{array}{l} a = 9x \\ b = 9y \end{array} \right\} \text{ إذن : } \text{PGCD}(a; b) = 9$$

$$9x + 9y = 72 \quad \text{إذن : } a + b = 72$$

$$x + y = 8 \quad \text{أي :}$$

الحالات الممكنة :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0

مرفوض مرفوض مرفوض مرفوض مرفوض

الحالات المرفوضة لا تحقق الشرط  $\text{PGCD}(x; y) = 1$ 

$$(x; y) \in \{(1; 7); (3; 5); (5; 3); (7; 1)\} \quad \text{نتيجة :}$$

$$(a; b) \in \{(9; 63); (27; 45); (45; 27); (63; 9)\} \quad \text{منه :}$$

## التمرين - 36

عين الثنائيات  $(a; b)$  من الأعداد الطبيعية حيث  $\begin{cases} ab = 360 \\ \text{PGCD}(a; b) = 6 \end{cases}$ 

## الحل - 36

$$\left. \begin{array}{l} y \in \mathbb{N}^*; x \in \mathbb{N}^* \\ \text{PGCD}(x; y) = 1 \end{array} \right\} \text{ حيث } \left. \begin{array}{l} a = 6x \\ b = 6y \end{array} \right\} \text{ إذن : } \text{PGCD}(a; b) = 6$$

$$xy = 10 \quad \text{إذن : } ab = 360 \quad 6x \cdot 6y = 360 \quad \text{أي } 6x \cdot 6y = 360$$

منه القيم الممكنة لـ  $x$  و  $y$  كما يلي :

x	1	2	5	10
y	10	5	2	1

$$(x; y) \in \{(1; 10); (2; 5); (5; 2); (10; 1)\} \quad \text{نتيجة :}$$

$$(a; b) \in \{(6; 60); (12; 30); (30; 12); (60; 6)\} \quad \text{منه :}$$

## التمرين - 37

عين الثنائيات  $(a; b)$  من الأعداد الطبيعية حيث  $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ \text{PGCD}(a; b) = 5 \end{cases}$ 

## الحل - 37

$$\left. \begin{array}{l} y \in \mathbb{N}^*; x \in \mathbb{N}^* \\ \text{PGCD}(x; y) = 1 \end{array} \right\} \text{ حيث } \left. \begin{array}{l} a = 5x \\ b = 5y \end{array} \right\} \text{ إذن : } \text{PGCD}(a; b) = 5$$

$$(a - b)(a + b) = 825 \quad \text{إذن : } a^2 - b^2 = 825$$

$$(5x - 5y)(5x + 5y) = 825 \quad \text{أي}$$

$$5 \times 5(x - y)(x + y) = 825 \quad \text{أي}$$

$$(x - y)(x + y) = 33 \quad \text{أي :}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y > 0 \\ (x - y)(x + y) = 33 \end{array} \right\} \text{ منه :}$$

أي  $\left. \begin{array}{l} x > y \\ (x-y)(x+y) = 33 \end{array} \right\}$  منه القيم الممكنة لـ  $(x-y)$  و  $(x+y)$  هي كما يلي :

$x-y$	1	3	11	33
$x+y$	33	11	3	1
$x$	17	7	7	17
$y$	16	4	-4	-16

مرفوض مرفوض

ملاحظة : للبحث عن  $x$  و  $y$  نحل الجملة  $\left\{ \begin{array}{l} x-y = \alpha \\ x+y = \beta \end{array} \right.$  كما يلي :  $2x = \alpha + \beta$

إذن :  $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$  منه :  $y = x - \alpha$  إذن :  $(x; y) \in \{(17; 16); (7; 4)\}$  منه :  $(a; b) \in \{(85; 80); (35; 20)\}$

التمرين 38

1 - عين  $\text{PGCD}(140; 143)$

2 - استنتج  $\text{PGCD}(a; b)$  في الحالات التالية :

$$(a; b) = (140 \times 34; 143 \times 34)$$

$$(a; b) = (143 \times 82; 140 \times 82)$$

الحل 38

$$\begin{array}{r} 140 \overline{) 143} \quad 3 \overline{) 46} \quad 3 \overline{) 2} \\ \underline{12} \quad \underline{46} \quad \underline{1} \\ 20 \quad 2 \quad 1 \\ \underline{2} \quad \quad \quad \end{array}$$

نتيجة :  $\text{PGCD}(140; 143) = 1$

$$\text{PGCD}(140 \times 34; 143 \times 34) = 34 \times \text{PGCD}(140; 143) = 34$$

$$\text{PGCD}(143 \times 82; 140 \times 82) = 82 \times \text{PGCD}(140; 143) = 82$$

التمرين 39

أثبت أن لا يوجد عدنان طبيعيان مجموعتهما 500 و قاسمهما المشترك الأكبر هو 7

الحل 39

لنفرض أنه يوجد عددين طبيعيين  $a$  و  $b$  حيث  $\left\{ \begin{array}{l} \text{PGCD}(a; b) = 7 \\ a + b = 500 \end{array} \right.$

إذن  $\text{PGCD}(a; b) = 7$   $\left\{ \begin{array}{l} a = 7x \\ b = 7y \end{array} \right.$  حيث  $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{N}^* \\ y \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$   $\text{PGCD}(x; y) = 1$

$$7x + 7y = 500 \quad \text{إذن} \quad a + b = 500$$

$$7(x + y) = 500 \quad \text{أي}$$

لكن 7 لا يقسم 500 إذن تناقض .

منه : لا يوجد أي عددين طبيعيين  $a$  و  $b$  يحققان الشروط المطلوبة .

التمرين 40

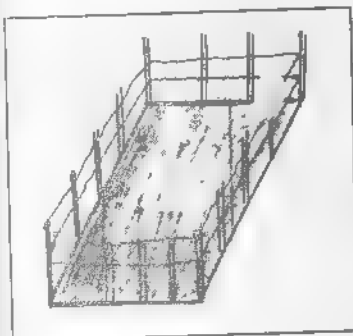
قطعة أرضية مستطيلة الشكل أبعادها  $156 \text{ m} \times 90 \text{ m}$  كما هو في الشكل المقابل . نريد إحاطتها بسياج على شكل أعمدة حديدية حيث نضع في كل زاوية عمود و المسافة بين كل عمودين متتاليين متساوية مثلى مثلى . (نفس المسافة على طول السياج) . إذا علمت أن المسافة بين كل وتدين هي عدد طبيعي  $n$  مقدر بالمتر حيث  $2 < n < 5$  . أحسب عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط هذه القطعة الأرضية .

الحل 40

بما أن المسافة بين وتدين متتاليين مثلى مثلى متساوية فإن العدد  $n$  يكون قاسم لـ 156 و قاسم لـ 90

$$n \in \{3; 4\} \quad \text{إذن} \quad 2 < n < 5$$

بما أن 4 لا يقسم 90 فإن القيمة الوحيدة الممكنة لـ  $n$  هي 3



إذن : عدد الأعمدة المحاطة بالقطعة الأرضية هو كما يلي :

$$p = 2(156 + 90) = 2(246) = 492$$

إذن : عدد الأعمدة هو :  $492/3 = 164$

#### التمرين - 41

نسمي قاسما تاما للعدد الطبيعي  $n$  كل قاسم لـ  $n$  موجب و يختلف عن  $n$   
 نقول عن عددين طبيعيين غير معدومين  $a$  و  $b$  أنهما وديان إذا كان  $a$  هو مجموع كل القواسم التامة للعدد  $b$  و  $b$  هو مجموع كل القواسم التامة للعدد  $a$ .

برهن أن العددين 220 و 284 وديان

#### الحل - 41

لنبحث عن قواسم كل من 220 و 284 كما يلي :

220	2	284	2
110	2	142	2
55	5	71	71
11	11	1	
1			

إذن :  $D_{220} = \{1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110; 220\}$

$D_{284} = \{1; 2; 4; 71; 142; 284\}$

منه القواسم التامة لـ 220 هي  $\{1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110\}$

و القواسم التامة لـ 284 هي  $\{1; 2; 4; 71; 142\}$

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

إذن : فعلا العددين 220 و 284 وديان

#### التمرين - 42

■ عدد طبيعي أكبر تماما من 2

برهن أن : يكون  $n+5$  مضاعف لـ  $n-2$  إذا و فقط إذا كان  $n=3$  أو  $n=9$

#### الحل - 42

لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر لـ  $n+5$  و  $n-2$  باستعمال خوارزمية إقليدس

$$\begin{array}{r|l} n+5 & n-2 \\ \hline n-2 & 1 \\ \hline 7 & \end{array}$$

إذن :  $\text{PGCD}(n+5; n-2) = \text{PGCD}(n-2; 7)$

منه :  $\text{PGCD}(n+5; n-2) \in \{1; 7\}$  لأن قواسم 7 هي  $\{1; 7\}$

نتيجة : يكون  $(n+5)$  مضاعف لـ  $(n-2)$  إذا و فقط إذا كان  $\text{PGCD}(n+5; n-2) = n-2$

أي : إذا و فقط إذا كان  $n-2=1$  أو  $n-2=7$

أي : إذا و فقط إذا كان  $n=3$  أو  $n=9$  و هو المطلوب

#### التمرين - 43

1 - أحسب مجموع قواسم العدد 8 ثم مجموع قواسم العدد 81

2 - ماهو عدد قواسم العدد  $8 \times 81$

#### الحل - 43

1 -  $D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$  إذن : مجموع قواسم 8 هو  $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$D_{81} = \{1; 3; 9; 27; 81\}$  إذن : مجموع قواسم 81 هو  $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$

2 - لنبحث عن عدد قواسم العدد  $8 \times 81$

$$8 \times 81 = 2^3 \times 3^4$$

لدينا :

إذن : قواسم العدد  $8 \times 81$  تكتب من الشكل  $2^n \times 3^p$  حيث  $n \in \{0; 1; 2; 3\}$  و  $p \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

إذن : عدد قواسم العدد  $8 \times 81$  هو  $5 \times 4 = 20$

ملحظة : يمكن البحث عن هذه القواسم كما يلي :

$2^n$	$2^0$					$2^1$					$2^2$					$2^3$				
$3^p$	$3^0$	$3^1$	$3^2$	$3^3$	$3^4$	$3^0$	$3^1$	$3^2$	$3^3$	$3^4$	$3^0$	$3^1$	$3^2$	$3^3$	$3^4$	$3^0$	$3^1$	$3^2$	$3^3$	$3^4$
$2^n \times 3^p$	1	3	9	27	81	2	6	18	54	162	4	12	36	108	324	8	24	72	216	648

## التمرين 44

1 - كيف يمكن إختيار العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $\frac{n+2}{n-1}$  عددا صحيحا .

2 - عين الأعداد الطبيعية  $a$  حيث من بين قواسم العدد  $a$  قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 و عدد قواسم  $a^2$  هو ثلاث مرات عدد قواسم العدد  $a$

## الحل 44

1 - يكون العدد  $\frac{n+2}{n-1}$  صحيحا إذا و فقط إذا كان  $\text{PGCD}(n+2; n-1) = n-1$

$$\begin{array}{r|l} n+2 & n-1 \\ n-1 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

باجراء خوارزمية إقليدس كما يلي :

$$\text{PGCD}(n+2; n-1) = \text{PGCD}(n-1; 3)$$

منه :  $\text{PGCD}(n+2; n-1) \in \{1; 3\}$  لأن قواسم 3 هي  $\{1; 3\}$

نتيجة : يكون  $\frac{n+2}{n-1}$  صحيحا إذا و فقط إذا كان  $n-1=1$  أو  $n-1=3$  أي  $n=2$  أو  $n=4$

2 -  $a$  له قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 إذن :  $a = 2^n \times 3^p$  حيث  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $p \in \mathbb{N}^*$

إذن : عدد قواسم  $a$  هو  $(n+1)(p+1)$

من جهة أخرى :  $a^2 = 2^{2n} \times 3^{2p}$

إذن : عدد قواسم  $a^2$  هو  $(2n+1)(2p+1)$

نتيجة : عدد قواسم  $a^2$  هو 3 مرات عدد قواسم  $a$  إذن :

$$(2n+1)(2p+1) = 3(n+1)(p+1)$$

$$4np + 2n + 2p + 1 = 3np + 3n + 3p + 3$$

$$np - n - p = 2$$

$$np - n = p + 2$$

$$n(p-1) = p+2$$

$$n = \frac{p+2}{p-1} \quad \text{حيث } p \neq 1$$

$$\left(\frac{p+2}{p-1}\right) \in \mathbb{N}^* \quad \text{إذن } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{لكن :}$$

منه : حسب السؤال (1) فإن  $p=2$  أو  $p=4$

$$n = \frac{4+2}{4-1} = 2 \quad \text{أو} \quad n = \frac{2+2}{2-1} = 4$$

$$(n; p) \in \{(4; 2); (2; 4)\}$$

$$a = 2^4 \times 3^2 \quad \text{أو} \quad a = 2^2 \times 3^4$$

## التمرين 45

عين كل الثنائيات  $(x; y)$  من الأعداد الصحيحة التي تحقق :  $xy - 4y - 12 = 0$

## الحل 45

$$xy - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow xy - 4y = 12$$

$$\Leftrightarrow y(x-4) = 12$$

$$x \neq 4 \Leftrightarrow y = \frac{12}{x-4}$$

بما أن  $y$  عدد صحيح فإن  $(x-4)$  هو قاسم لـ 12

$$(x-4) \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12\}$$

$$x \in \{5; 6; 7; 8; 10; 16; 3; 2; 1; 0; -2; -8\}$$

$$y \in \{12; 6; 4; 3; 2; 1; -12; -6; -4; -3; -2; -1\} \quad \text{إذن } y = \frac{12}{x-4}$$

$$(x; y) \in \{(5; 12); (6; 6); (7; 4); (8; 3); (10; 2); (16; 1); (3; -12); (2; -6); (1; -4); (0; -3); (-2; -2); (-8; -1)\}$$

## التمرين 46

في المستوي المنسوب إلى معلم نعتبر (C) منحنى الدالة  $f$  المعرفة على



$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 1} \quad \text{بـ} \quad D = [-3; 1[ \cup ]1; 3]$$

- 1 - عين العدد الحقيقي  $a$  حتى يكون من أجل كل  $x$  من  $D$  :  $f(x) = 2x - 1 + \frac{a}{x - 1}$   
 2 - عين نقط المنحنى (C) التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

## الحل - 46

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 3x - 3 & x - 1 \\ \hline 2x^2 - 2x & 2x - 1 \\ \hline -x - 3 & \\ -x + 1 & \\ \hline -4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{1 - باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :} \\ \text{إذن : } f(x) = 2x - 1 - \frac{4}{x - 1} \\ \text{أي } a = -4 \end{array}$$

- 2 - لتكن  $N(x; y)$  نقطة من (C)  
 تكون إحداثيات  $N$  صحيحة إذا وفقط إذا كان :  $x \in \{-3; -2; 0; 2; 3\}$

و  $f(x) \in \mathbb{Z}$  أي  $\frac{4}{x - 1} \in \mathbb{Z}$  لأن  $(2x - 1) \in \mathbb{Z}$   
 منه :  $(x - 1)$  يقسم 4

أي  $(x - 1) \in \{1; 2; 4; -1; -2; -4\}$

أي :  $x \in \{2; 3; 5; 0; -1; -3\}$

بالتقاطع مع المجموعة  $\{-3; -2; 0; 2; 3\}$  نحصل على :  $x \in \{-3; 0; 2; 3\}$

إذن :  $y \in \{f(-3); f(0); f(2); f(3)\}$

أي :  $y \in \{-6; 3; -1; 3\}$

إذن : النقط المطلوبة هي  $\{N_1(-3; -6); N_2(0; 3); N_3(2; -1); N_4(3; 3)\}$

## التمرين - 47

$n$  عدد طبيعي . نضع  $a = n(n^2 + 5)$

- 1 - برهن أن  $a$  عدد زوجي .

- 2 - برهن أن  $a$  مضاعف 3

## الحل - 47

- 1 -  $n$  عدد طبيعي إذن نميز حالتين :

الحالة الأولى :  $n$  زوجي منه :  $n = 2p$  حيث  $p \in \mathbb{N}$

إذن :  $a = 2p(n^2 + 5)$

منه :  $a$  زوجي .

الحالة الثانية :  $n$  فردي إذن :  $n = 2p + 1$  حيث  $p \in \mathbb{N}$

منه :  $a = n[(2p + 1)^2 + 5]$

أي  $a = n(4p^2 + 4p + 1 + 5)$

أي  $a = n(4p^2 + 4p + 6)$

أي  $a = 2n(2p^2 + 2p + 3)$

منه :  $a$  زوجي .

نتيجة : من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن العدد  $a$  زوجي .

- 2 -  $n$  عدد طبيعي إذن نميز الحالات التالية :

الحالة الأولى :  $n = 3p$  حيث  $p \in \mathbb{N}$

إذن :  $a = 3p(n^2 + 5)$

منه :  $a$  مضاعف 3

الحالة الثانية :  $n = 3p + 1$  حيث  $p \in \mathbb{N}$

إذن :  $a = n[(3p + 1)^2 + 5]$

أي  $a = n(9p^2 + 6p + 1 + 5)$

أي  $a = n(9p^2 + 6p + 6)$

$$a = 3n(3p^2 + 2p + 2) \quad \text{أي}$$

منه :  $a$  مضاعف 3

الحالة الثالثة :  $n = 3p + 2$  حيث  $p \in \mathbb{N}$

$$a = n[(3p + 2)^2 + 5] \quad \text{إذن :}$$

$$a = n(9p^2 + 12p + 4 + 5) \quad \text{أي}$$

$$a = n(9p^2 + 12p + 9) \quad \text{أي}$$

$$a = 3n(3p^2 + 4p + 3) \quad \text{أي}$$

$a$  مضاعف 3

نتيجة : من أجل كل قيمة للعدد الطبيعي  $n$  فإن  $a$  مضاعف 3

التمرين - 48

$a$  عدد طبيعي

برهن أن العدد  $A = a(a^2 - 1)$  مضاعف 6

الحل - 48

ليكن  $a$  عدد طبيعي

إذن : الأعداد  $(a - 1)$  ،  $a$  و  $a + 1$  هي أعداد صحيحة متتالية

منه :  $\left. \begin{array}{l} \text{أحد هذه الأعداد زوجية أي تكتب من الشكل } 2p \text{ حيث } p \in \mathbb{N} \\ \text{أحد هذه الأعداد مضاعفة لـ } 3 \text{ أي تكتب من الشكل } 3q \text{ حيث } q \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$

إذن : جداء هذه الأعداد يكتب من الشكل  $2p \times 3q$  أي  $6pq$

$$A = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1)$$

فإن  $A$  يكتب من الشكل  $6pq$  إذن :  $A$  مضاعف 6 .

التمرين - 49

1 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن رقم أحاد العدد  $n^5 - n$  هو 0

2 - استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $p$  فإن العددين  $n^{p+1}$  و  $n^{p+5}$  لهما نفس رقم الأحاد

الحل - 49

1 - يكون رقم أحاد العدد  $n^5 - n$  هو 0 إذا فقط إذا كان  $n^5 - n$  مضاعف 10

لنثبت إذن بالتراجع صحة الخاصية :  $n^5 - n$  مضاعف 10

من أجل :  $n = 0$  :  $0^5 - 0 = 0$  و 0 مضاعف 10

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$

نفرض أن  $n^5 - n$  مضاعف 10 أي  $n^5 - n = 10k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

هل  $(n + 1)^5 - (n + 1)$  مضاعف 10 ؟

$$(n + 1)^5 - (n + 1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n$$

$$= n^5 - n + 10(n^3 + n^2) + 5n(n^3 + 1)$$

$$= 10k + 10(n^3 + n^2) + 5n(n^3 + 1)$$

$$5n(n^3 + 1) = 5 \times 2p(n^3 + 1) \quad \text{إذا كان } n \text{ زوجي فإن}$$

$$5n(n^3 + 1) = 10p(n^3 + 1) \quad \text{أي}$$

إذا كان  $n$  فردي فإن  $n^3 + 1$  زوجي

$$5n(n^3 + 1) = 10q \quad \text{أي}$$

$$(n + 1)^5 - (n + 1) = 10[k + (n^3 + n^2) + q] \quad \text{منه :}$$

$$(n + 1)^5 - (n + 1) \text{ مضاعف } 10 \quad \text{أي :}$$

منه : الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $n^5 - n$  مضاعف 10

أي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن رقم أحاد  $n^5 - n$  هو 0

2 - لدينا :  $n^{p+5} - n^{p+1} = n^p(n^5 - n)$

إذن : رقم أحاد العدد  $n^{p+5} - n^{p+1}$  هو 0 منه العددين  $n^{p+5}$  و  $n^{p+1}$  لهما نفس رقم الأحاد .

## التمرين - 50

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع  $\left. \begin{aligned} a &= n^2 + 5n + 4 \\ b &= n^2 + 3n + 2 \end{aligned} \right\}$

- 1 - بين أن العدد  $(n+1)$  هو قاسم مشترك للعددين  $a$  و  $b$
- 2 - عين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها العدد  $(n+1)$  قاسما للعدد  $3n^2 + 15n + 20$

## الحل - 50

1 - باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} n^2 + 3n + 2 & n+1 \\ n^2 + n & n+2 \\ \hline 2n+2 & \\ 2n+2 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} n^2 + 5n + 4 & n+1 \\ n^2 + n & n+4 \\ \hline 4n+4 & \\ 4n+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

بما أن بواقي القسمة الإقليدية لـ كل من  $a$  و  $b$  على  $(n+1)$  هو 0 فإن العدد  $(n+1)$  هو قاسم مشترك لكل من  $a$  و  $b$

- 2 - يكون  $(n+1)$  قاسما لـ  $3n^2 + 15n + 20$  إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي  $q$  حيث  $3n^2 + 15n + 20 = q(n+1)$

$$\begin{array}{r|l} 3n^2 + 15n + 20 & n+1 \\ 3n^2 + 3n & 3n+12 \\ \hline 12n+20 & \\ 12n+12 & \\ \hline 8 & \end{array} \quad \begin{aligned} \text{أي : } q &= \frac{3n^2 + 15n + 20}{n+1} \\ \text{باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :} \\ \text{نحصل على } q &= 3n + 12 + \frac{8}{n+1} \end{aligned}$$

إذن : يكون  $(n+1)$  قاسم لـ  $3n^2 + 15n + 20$  إذا وفقط

إذا كان  $(n+1) \in \{1; 2; 4; 8\}$  أي  $8 \mid (n+1)$

منه :  $n \in \{0; 1; 3; 7\}$

خلاصة : قيم  $n$  حتى يكون  $(n+1)$  قاسم لـ  $3n^2 + 15n + 20$  هي  $\{0; 1; 3; 7\}$

## التمرين - 51

$n$  و  $a$  عددان صحيحان حيث  $a$  يقسم  $n-1$  و  $n^2+n+3$

- 1 - بين أن  $a$  يقسم  $n^2 - 2n + 1$

- 2 - استنتج أن  $a$  يقسم  $3n+2$

- 3 - بين إذن أن  $a$  يقسم 5

- 4 - ما هي القيم الصحيحة الممكنة للعدد  $a$  ؟

## الحل - 51

- 1 - لدينا :  $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$

إذن :  $(n-1)$  يقسم  $n^2 - 2n + 1$  من أجل  $n \neq 1$

لكن :  $a$  يقسم  $(n-1)$

إذن : بالتعدي فإن  $a$  يقسم  $n^2 - 2n + 1$

$$\left. \begin{aligned} a \mid n^2 + n + 3 \\ a \mid n^2 - 2n + 1 \end{aligned} \right\} \text{ لدينا } \quad \text{إذن : } a \mid (n^2 + n + 3) - (n^2 - 2n + 1) \quad \text{أي } a \mid 3n + 2$$

و هو المطلوب

$$\left. \begin{aligned} a \mid 3n - 3 \\ a \mid 3n + 2 \end{aligned} \right\} \text{ أي } \quad \left. \begin{aligned} a \mid 3(n-1) \\ a \mid 3n + 2 \end{aligned} \right\} \text{ إذن } \quad \left. \begin{aligned} a \mid n - 1 \\ a \mid 3n + 2 \end{aligned} \right\} \text{ لدينا } 3$$

منه :  $a \mid 3n + 2 - (3n - 3)$  أي  $a \mid 5$  و هو المطلوب

$$\left. \begin{aligned} a \mid 5 \\ a \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } a \in \{1; 5; -1; -5\} \quad 4$$

## التمرين 52 -

$n$  عدد طبيعي فردي .  $S$  هو مجموع أعداد طبيعية متتالية و عددها  $n$  بين أن العدد  $S$  يقبل القسمة على  $n$  .

## الحل - 52

ليكن  $n = 2p + 1$  حيث  $p \in \mathbb{N}$   
 $S = q + (q + 1) + (q + 2) + \dots + (q + n - 1)$  حيث  $q$  عدد طبيعي كفي .  
 $S$  هو مجموع  $n$  حد من حدود متتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول  $q$

$$\begin{aligned} \text{إذن : } S &= \frac{n}{2} (q + q + n - 1) \\ &= \frac{n}{2} (2q + n - 1) \\ &= \frac{n}{2} (2q + 2p + 1 - 1) \\ &= \frac{n}{2} (2q + 2p) \\ &= \frac{2n}{2} (q + p) \\ &= n(q + p) \\ \text{إذن : } S &\text{ يقبل القسمة على } n . \end{aligned}$$

## التمرين 53 -

برهن بالتراجع على  $n$  أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $n^3 + 11n$  يقبل القسمة على 6

## الحل - 53

من أجل  $n = 0$  :  $n^3 + 11n = 0$  و 0 يقبل القسمة على 6  
 إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$   
 نفرض أن  $n^3 + 11n$  يقبل القسمة على 6 من أجل  $n > 0$  أي  $n^3 + 11n = 6k$   
 هل  $(n + 1)^3 + 11(n + 1)$  يقبل القسمة على 6 ؟  

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 + 11(n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 \\ &= (n^3 + 11n) + 12 + 3n^2 + 3n \\ &= 6k + 6(2) + 3n(n + 1) \\ 3n(n + 1) &= 6p(n + 1) \text{ إذن : } n = 2p \text{ زوجي فإن} \\ \text{إذا كان } n \text{ فردي فإن } (n + 1) \text{ زوجي أي } n + 1 &= 2p \text{ منه } 3n(n + 1) = 6np \\ \text{إذن : من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ فإن } 3n(n + 1) &= 6q \text{ حيث } q \in \mathbb{N} \\ (n + 1)^3 + 11(n + 1) &= 6k + 6(2) + 6q \\ &= 6(k + 2 + q) \\ &= 6k' \\ \text{إذن : } (n + 1)^3 + 11(n + 1) &\text{ يقبل القسمة على 6} \\ \text{أي الخاصية صحيحة من أجل } n + 1 & \\ \text{نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن } n^3 + 11n &\text{ يقبل القسمة على 6} \end{aligned}$$

## التمرين 54 -

ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 71 على 72 ؟

## الحل - 54

$71 < 72$  إذن : باقي القسمة الإقليدية لـ 71 على 72 هو 71

## التمرين 55 -

يحتوي كتاب على 4350 سطرا مكتوبا حيث كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة .  
 ما هو عدد صفحات هذا الكتاب و ما هو عدد الأسطر المكتوبة على الصفحة الأخيرة

$$\begin{array}{r}
 4350 \quad | \quad 34 \\
 \underline{34} \quad | \quad 127 \\
 95 \quad | \\
 \underline{68} \quad | \\
 270 \quad | \\
 \underline{238} \quad | \\
 32 \quad |
 \end{array}$$

**الحل - 55**

بإجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

إذن :  $4350 = 34(127) + 32$   
 منه : عدد صفحات الكتاب هو :  $127 + 1 = 128$   
 و الصفحة الأخيرة تحمل 32 مطرا مكتوبا .

**التمرين - 56**

علما أنه يوجد عدد طبيعي  $k$  حيث  $100^{100} = 13k + 35$  ، ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد  $100^{100}$  على 13 ؟

**الحل - 56**

$100^{100} = 13k + 35$  إذن : باقي قسمة  $100^{100}$  على 13 هو نفسه باقي قسمة 35 على 13  
 إذن : باقي قسمة  $100^{100}$  على 13 هو 9

**التمرين - 57**

$n$  و  $m$  عدنان طبيعيان باقي قسمتهما على 17 هما على الترتيب 8 و 12 . عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد  $n+m$  ؛  $nm$  ؛  $m^2$  على 17

**الحل - 57**

نضع  $\left. \begin{array}{l} n = 17k + 8 \\ m = 17p + 12 \end{array} \right\} k \in \mathbb{N} \text{ حيث } p \in \mathbb{N}$

منه :  $\left. \begin{array}{l} n+m = 17k+8+17p+12 \\ nm = (17k+8)(17p+12) \\ m^2 = (17p+12)^2 \end{array} \right\}$

أي  $\left. \begin{array}{l} n+m = 17(k+p)+20 \\ nm = 17k(17p+12)+8 \times 17p+96 \\ m^2 = 17^2 p^2 + 24(17p) + 144 \end{array} \right\}$

أي  $\left. \begin{array}{l} n+m = 17(k+p)+17+3 \\ nm = 17(17kp+12k+8p)+17(5)+11 \\ m^2 = 17(17p^2+24p)+17(8)+8 \end{array} \right\}$

منه  $\left. \begin{array}{l} n+m = 17(k+p+1)+3 \\ nm = 17(17kp+12k+8p+5)+11 \\ m^2 = 17(17p^2+24p+8)+8 \end{array} \right\}$

إذن :  $\left. \begin{array}{l} n+m \text{ باقي قسمة } 17 \text{ على } 3 \\ nm \text{ باقي قسمة } 17 \text{ على } 11 \\ m^2 \text{ باقي قسمة } 17 \text{ على } 8 \end{array} \right\}$

**التمرين - 58**

عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة  $n$  التي يكون باقي قسمتها على 43 مساويا لمربع حاصل هذه القسمة .

**الحل - 58**

ليكن  $n = 43q + r$  حيث  $\left. \begin{array}{l} q \text{ حاصل القسمة} \\ r \text{ باقي القسمة} \end{array} \right\} 0 \leq r < 43$

لدينا  $r = q^2$  إذن :  $0 \leq q^2 < 43$   
 بما أن  $q$  عدد طبيعي فإن القيم الممكنة لـ  $q$  حتى يكون  $0 \leq q^2 < 43$  هي :  
 $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  لأن  $7^2 = 49$   
 إذن : القيم الممكنة لـ  $r$  حيث  $r = q^2$  هي :  $\{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36\}$

نتيجة :

قيم $q$	0	1	2	3	4	5	6
قيم $r$	0	1	4	9	16	25	36
$n = 43q + r$	0	44	90	138	188	240	294

منه قيم  $n$  المطلوبة هي :  $\{44; 90; 138; 188; 240; 294\}$  ( $n$  غير معدوم)

## التمرين 59

- 1 - حول  $241312 s$  (ثانية) إلى الأيام و الساعات و الدقائق و الثواني .  
 2 - أكتب خوارزمية لتحويل عدد  $n$  من الثواني إلى أيام ، ساعات ، دقائق و ثواني .

## الحل - 59

- 1 -  
 1 يوم  $\leftarrow$  24 ساعة  
 1 ساعة  $\leftarrow$  60 دقيقة  
 1 دقيقة  $\leftarrow$  60 ثانية  
 إذن : 1 ساعة  $\leftarrow 60 \times 60$  ثانية  
 منه : 1 يوم  $\leftarrow 24 \times 60 \times 60$  ثانية  
 أي : 1 يوم  $\leftarrow 86400$  ثانية  
 إذن : عدد الأيام المتواجدة في 241312 ثانية هو حاصل قسمة 241312 على 86400

$$\begin{array}{r} 241312 \quad | \quad 86400 \\ 172800 \quad | \quad 2 \\ \hline 68512 \end{array}$$

منه : عدد الأيام هو : 2

- عدد الساعات المتواجدة في 68512 ثانية هو حاصل قسمة 68512 على 3600  
 منه عدد الساعات هو : 19

$$\begin{array}{r} 68512 \quad | \quad 3600 \\ 68400 \quad | \quad 19 \\ \hline 112 \end{array}$$

عدد الدقائق المتواجدة هي 112 ثانية هو حاصل قسمة 112 على 60  
 إذن : عدد الدقائق هو : 1

- خلاصة : 241312 ثانية فيها يومين و 19 ساعة و دقيقة واحدة و 52 ثانية .

## 2 - الخوارزمية

- 1 - نبعث عن  $r_1$  حيث  $n = q_1 \times 86400 + r_1$  حيث  $0 \leq r_1 < 86400$   
 2 - إذا كان  $r_1 \neq 0$  نبعث عن  $r_2$  حيث  $r_1 = 3600 q_2 + r_2$  حيث  $0 \leq r_2 < 3600$   
 3 - إذا كان  $r_2 \neq 0$  نبعث عن  $r_3$  حيث  $r_2 = 60 q_3 + r_3$  حيث  $0 \leq r_3 < 60$   
 نتيجة : العدد  $n$  من الثواني مكون من :  
 $q_1$  يوم و  $q_2$  ساعة و  $q_3$  دقائق و  $r_3$  ثواني .

## التمرين 60

- حاصل القسمة الإقليدية للعدد 1517 على العدد الطبيعي  $b$  هو 75  
 عين  $b$  ثم باقى هذه القسمة .

## الحل - 60

$$\text{ليكن } r \text{ باقى هذه القسمة حيث } 0 \leq r < b$$

إذن :  $1517 = 75b + r$

$$\begin{array}{r} 1517 \quad | \quad 75 \\ 150 \quad | \quad 20 \\ \hline 17 \end{array}$$

لنجري القسمة الإقليدية لـ 1517 على 75 كما يلي :  
 منه :  $1517 = 75 \times 20 + 17$   
 إذن :  $b = 20$  و  $r = 17$

## التمرين 61

- 1 - أنجز القسمة الإقليدية للعدد 76 على 17  
 2 -  $n$  عدد طبيعي . ما هو حاصل و باقى قسمة العدد  $n + 76$  على 17  
 3 - إستنتج الحالة العامة كما يلي : القسمة الإقليدية لـ  $a$  على  $b$  هو  $q$  و الباقي  $r$  .  
 ما هو حاصل و باقى قسمة العدد  $n + a$  على  $b$

## الحل - 61

$$\begin{array}{r} 76 \quad | \quad 17 \\ 68 \quad | \quad 4 \\ \hline 8 \end{array}$$

1 -

إذن :  $76 = 17(4) + 8$  أي الحاصل 4 و الباقي 8  
 2 - لدينا  $76 = 17(4) + 8$  إذن :  $n + 76 = n + 17(4) + 8$   
 أي :  $n + 76 = (n + 8) + 17(4)$   
 منه : باقي قسمة  $(n + 76)$  على 17 هو باقي قسمة  $(n + 8)$  على 17  
 وحاصل القسمة هو  $4 + q$  حيث  $q$  هو حاصل قسمة  $(n + 8)$  على 17  
 مثال : ليكن  $n = 20$  إذن :  $20 + 8 = 28$  و  $28 = 17(1) + 11$   
 منه : باقي قسمة  $(20 + 76)$  على 17 هو 11  
 حاصل قسمة  $(20 + 76)$  على 17 هو  $1 + 4 = 5$

التحقيق :  $20 + 76 = 96$

96	17
85	5
11	

3 - الحالة العامة :  $a = bq + r$  و  $n + r = bq' + r'$  حيث  $0 \leq r' < b$  و  $0 \leq r < b$

إذن : باقي قسمة  $(a + n)$  على  $b$  هو  $r'$   
 حاصل قسمة  $(n + a)$  على  $b$  هو  $q + q'$

#### التمرين - 62

1 - بين أن إذا كان  $a$  و  $b$  عدداً طبيعيين غير معدومين حيث  $(a^2 + b^2)$  عدد فردي فإن  $a$  و  $b$  مختلفين في الشفعية أحدهما فردي و الآخر زوجي

2 - بين أن إذا كان  $n$  عدد فردي هو مجموع مربعين فإن  $n$  يكتب على الشكل  $n = 4k + 1$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

#### الحل - 62

1 - ليكن  $a$  و  $b$  عددين طبيعيين . نميز الحالات التالية :

a	b	$a^2 + b^2$
$2p$	$2q$	$4p^2 + 4q^2 = 2(2p^2 + 2q^2)$
$2p$	$2q + 1$	$4p^2 + 4q^2 + 4q + 1 = 2(2p^2 + 2q^2 + 2q) + 1$
$2p + 1$	$2q$	$4p^2 + 4p + 4q^2 + 1 = 2(2p^2 + 2p + 2q^2) + 1$
$2p + 1$	$2q + 1$	$4p^2 + 4p + 4q^2 + 4q + 2 = 2(2p^2 + 2p + 2q^2 + 2q + 1)$

نتيجة : الحالات الوحيدة التي يكون فيها  $a^2 + b^2$  فردي هي من أجل :

$$\left. \begin{array}{l} \text{أو } a = 2p \text{ و } b = 2q + 1 \\ \text{أو } a = 2p + 1 \text{ و } b = 2q \end{array} \right\} \text{ أي } a \text{ و } b \text{ مختلفين في الشفعية .}$$

2 -  $n$  فردي و  $n$  مجموع مربعين

ليكن  $n = a^2 + b^2$  حيث  $a$  و  $b$  عددين طبيعيين غير معدومين .

حسب السؤال (1) فإن  $a$  و  $b$  من شفعتين مختلفتين .

نضع  $a = 2p + 1$  و  $b = 2q$  حيث  $p$  و  $q$  عددين طبيعيين .

$$n = (2p + 1)^2 + (2q)^2$$

$$= 4p^2 + 4p + 4q^2 + 1$$

$$= 4(p^2 + p + q^2) + 1$$

$$= 4k + 1 \text{ حيث } k = p^2 + p + q^2$$

نتيجة :  $n$  يكتب من الشكل  $4k + 1$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

#### التمرين - 63

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع  $u_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$

1 - برر أن  $u_n$  عدد طبيعي .

2 - أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$

3 - استنتج باقي قسمة العدد  $5^{n+1}$  على 4 من أجل كل عدد طبيعي  $n$

#### الحل - 63

1 - من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن  $5^n$  هو عدد طبيعي .

إذن :  $u_n$  عدد طبيعي لأنه عبارة عن مجموع أعداد طبيعية .

$$2 - u_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$$

إذن :  $u_n$  هو مجموع  $(n+1)$  حد من حدود متتالية هندسية أساسها 5 و حدما الأول 1

$$u_n = \frac{5^{n+1}-1}{4} \quad \text{أي} \quad u_n = 1 \times \frac{5^{n+1}-1}{5-1} \quad \text{منه :}$$

$$\frac{5^{n+1}-1}{4} \in \mathbb{N} \quad \text{فإن} \quad u_n \in \mathbb{N}$$

أي : 4 يقسم  $5^{n+1}-1$

أي :  $5^{n+1}-1 = 4k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

منه :  $5^{n+1} = 4k + 1$

أي : باقي قسمة  $5^{n+1}$  على 4 هو 1

#### التمرين - 64

1 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  العدد  $2^{3n}-1$  مضاعف 7

2 - إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد  $a$  على 7 في كل من الحالات التالية :

$$(أ) \quad a = 2^{3n} \quad (ب) \quad a = 2^{3n+1} \quad (ج) \quad a = 2^{3n+2}$$

#### الحل - 64

1 - البرهان بالتراجع :

$$\text{من أجل } n=0 : 2^{3n}-1 = 1-1 = 0$$

0 مضاعف 7 إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$

نفرض أن  $2^{3n}-1$  مضاعف 7 من أجل  $n > 0$  (أي  $2^{3n}-1 = 7k$ )

هل  $2^{3(n+1)}-1$  مضاعف 7 ؟

$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)}-1 &= 2^{3n+3}-1 \\ &= 2^3 \times 2^{3n}-1 \\ &= 8 \times 2^{3n}-1 \\ &= 7 \times 2^{3n} + 2^{3n}-1 \end{aligned}$$

$$2^{3n}-1 = 7k \quad \text{لأن حسب فرضية التراجع} \quad = 7 \times 2^{3n} + 7k$$

$$= 7(2^{3n} + k)$$

إذن :  $2^{3(n+1)}-1$  مضاعف 7

منه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $2^{3n}-1$  مضاعف 7

2 - ليكن  $2^{3n}-1 = 7k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

$$(أ) \quad \text{إذن : } 2^{3n} = 7k + 1$$

منه : باقي قسمة  $2^{3n}$  على 7 هو 1

$$(ب) \quad 2^{3n+1} = 2 \times 2^{3n} = 2^{3n} + 2^{3n} = 2^{3n}-1 + 2^{3n}-1 + 2 = 7k + 7k + 2 = 7(2k) + 2$$

إذن : باقي قسمة  $2^{3n+1}$  على 7 هو 2

$$(ج) \quad 2^{3n+2} = 4 \times 2^{3n} = 2^{3n} + 2^{3n} + 2^{3n} + 2^{3n} = (2^{3n}-1) + (2^{3n}-1) + (2^{3n}-1) + (2^{3n}-1) + 4$$

$$= 7k + 7k + 7k + 7k + 4$$

إذن : باقي قسمة  $2^{3n+2}$  على 7 هو 4

#### التمرين - 65

$a$  و  $b$  عدنان طبيعيان غير معدومين .

1 - برهن أن القواسم المشتركة لـ  $a$  و  $(a^2+b)$  هي نفسها القواسم المشتركة لـ  $a$  و  $b$

إستنتج علاقة بين  $\text{PGCD}(a^2+b; a)$  و  $\text{PGCD}(a; b)$

2 - برهن أن  $\text{PGCD}(a+b; 2a+3b) = \text{PGCD}(a; b)$

#### الحل - 65

1 - ليكن  $\Delta$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $a^2+b$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | a^2+b \end{array} \right\} \quad \text{إذن :} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta | a^2 \\ \Delta | a^2+b \end{array} \right\} \quad \text{منه :} \quad \Delta | a^2+b-a^2 \quad \text{أي} \quad \Delta | b$$

إذن : إذا كان  $\Delta$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $a^2+b$  فإن  $\Delta$  قاسم لـ  $b$  ..... (1)



ليكن الآن  $\Delta$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | b \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} \Delta | a^2 \\ \Delta | b \end{array} \right\} \text{ منه : } \Delta | a^2 + b$$

إذن : إذا كان  $\Delta$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  فإن  $\Delta$  قاسم مشترك لـ  $a^2 + b$  ..... (2)  
من (1) و (2) نستنتج أن القواسم المشتركة لـ  $a$  و  $a^2 + b$  هي نفسها القواسم المشتركة لـ  $a$  و  $b$  و خاصة القاسم المشترك الأكبر .

$$\text{أي : } \text{PGCD}(a^2 + b ; a) = \text{PGCD}(a ; b)$$

2 - بإجراء القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{r} 2a + 3b \overline{) a + b} \\ \underline{2a + 2b} \phantom{0} \\ b \phantom{0} \end{array}$$

$$\text{PGCD}(2a + 3b ; a + b) = \text{PGCD}(a + b ; b)$$

$$\begin{array}{r} a + b \overline{) b} \\ \underline{b} \\ a \end{array}$$

من جهة أخرى و بإجراء القسمة الإقليدية

$$\text{PGCD}(a + b ; b) = \text{PGCD}(b ; a)$$

$$\text{نتيجة : } \text{PGCD}(2a + 3b ; a + b) = \text{PGCD}(a ; b)$$

التمرين = 66

$n$  عدد طبيعي . نضع  $a = 11n + 3$  و  $b = 13n - 1$

1 - بين أن :  $13a - 11b = 50$

2 - عين كل القيم الممكنة لـ  $\text{PGCD}(a ; b)$

3 - عين ثنائية  $(a ; b)$  حيث يكون  $\text{PGCD}(a ; b) = 50$

الحل = 66

$$13a - 11b = 13(11n + 3) - 11(13n - 1)$$

$$= 143n + 39 - 143n + 11$$

$$= 50$$

1 -

2 - ليكن  $\text{PGCD}(a ; b) = \Delta$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | b \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} \Delta | 13a \\ \Delta | 11b \end{array} \right\} \text{ إذن : } \Delta | 13a - 11b \text{ أي } \Delta | 50$$

منه : القيم الممكنة لـ  $\Delta$  هي قواسم العدد 50

$$\text{أي : } \text{PGCD}(a ; b) \in \{1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50\}$$

3 - لنبحث عن  $a$  و  $b$  حيث  $\text{PGCD}(a ; b) = 50$

$$13a - 11b = 50 \text{ لدينا}$$

$$13(6) - 11(7) = 78 - 77 = 1 \text{ لاحظ أن :}$$

$$13(6 \times 50) - 11(7 \times 50) = 50 \text{ إذن :}$$

$$13(300) - 11(350) = 50 \text{ أي}$$

$$13a - 11b = 50 \text{ إذن : الثنائية } (300 ; 350) \text{ هي حل للمعادلة}$$

$$\left. \begin{array}{l} 11n + 3 = 300 \\ 13n - 1 = 350 \end{array} \right\} \text{ مله : } \left. \begin{array}{l} 11n = 297 \\ 13n = 351 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} n = 297/11 \\ n = 351/13 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 300 \\ b = 350 \end{array} \right\} \text{ إذن : } n = 27 \text{ نتيجة :}$$

التمرين = 67

عين كل الثنائيات  $(a ; b)$  من الأعداد الطبيعية التي تحقق  $2a^2 + b^2 = 20992$

$$\text{PGCD}(a ; b) = 16$$

الحل = 67

$$\left. \begin{array}{l} a = 16x \\ b = 16y \end{array} \right\} \text{ ليكن } \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{N}^* \\ y \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \text{ حيث } \text{PGCD}(x ; y) = 1$$

$$2(16x)^2 + (16y)^2 = 20992$$

$$2(256x^2) + 256y^2 = 20992$$

$$2x^2 + y^2 = 82$$

إذن : الشرط  $2a^2 + b^2 = 20992$  يصبح

أي :

أي

$$y^2 = 82 - 2x^2 \quad \text{أي}$$

$$y^2 = 2(41 - x^2) \quad \text{أي}$$

بما أن  $y^2 > 0$  فإن  $41 - x^2 > 0$  إذن  $x^2 < 41$  منه  $x < 7$   
 إذن : القيم الممكنة لـ  $x$  هي  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$   
 منه الجدول التالي :

x	1	2	3	4	5	6
$x^2$	1	4	9	16	25	36
$41 - x^2$	40	37	32	25	16	5
$2(41 - x^2)$	80	74	64	50	32	10

نتيجة : الحالة الوحيدة التي يكون فيها العدد  $2(41 - x^2)$  مربع تام هي من أجل  $x = 3$  إذن :  $y^2 = 64$  منه  $y = 8$   
 بما أن  $\text{PGCD}(3; 8) = 1$  فإن الثنائية المطلوبة هي :

$$(a; b) = (16 \times 3; 16 \times 8) \quad \text{منه}$$

$$(a; b) = (48; 128) \quad \text{أي}$$

التمرين 68

$a$  و  $b$  عدنان طبيعيان غير معدومين . نضع  $\text{PGCD}(a; b) = d$   
 عين كل الثنائيات  $(a; b)$  التي تحقق  $a b + 5 d^2 = 35 d$

الحل 68

$$\left. \begin{array}{l} y \in \mathbb{N}^*; x \in \mathbb{N}^* \\ \text{PGCD}(x; y) = 1 \end{array} \right\} \text{حيث} \quad \left. \begin{array}{l} a = x d \\ b = y d \end{array} \right\} \text{ليكن}$$

$$a b + 5 d^2 = 35 d \Leftrightarrow (x d)(y d) + 5 d^2 = 35 d \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow x y d^2 + 5 d^2 = 35 d$$

$$\Leftrightarrow (x y + 5) d^2 = 35 d$$

$$d \neq 0 \Leftrightarrow (x y + 5) d = 35$$

إذن :  $(x y + 5)$  يقسم 35

لكن  $x y > 0$  إذن :  $x y + 5 > 5$

منه :  $(x y + 5) \in \{7; 35\}$

إذن :  $d \in \{5; 1\}$

الحالة (1) من أجل  $x y + 5 = 7$  إذن :  $x y = 2$  و  $d = 5$

منه :  $(x; y) \in \{(1; 2); (2; 1)\}$

أي  $(a; b) \in \{(5; 10); (10; 5)\}$

الحالة (2) من أجل  $x y + 5 = 35$  إذن :  $x y = 30$  و  $d = 1$

منه :  $(x; y) \in \{(1; 30); (2; 15); (3; 10); (5; 6); (6; 5); (10; 3); (15; 2); (30; 1)\}$

إذن :  $(a; b) \in \{(1; 30); (2; 15); (3; 10); (5; 6); (6; 5); (10; 3); (15; 2); (30; 1)\}$

خلاصة : الثنائيات  $(a; b)$  المطلوبة هي :

$\{(5; 10); (10; 5); (1; 30); (2; 15); (3; 10); (5; 6); (6; 5); (10; 3); (15; 2); (30; 1)\}$

## تمارين نماذج للبكالوريا

## التمرين 1 -

$a$  و  $b$  عدنان طبيعيان غير معدومين .

نضع  $x = 7a - 5b$  و  $y = 4a - 3b$

1 - برهن أن :  $\text{PGCD}(|x| ; |y|) = \text{PGCD}(a ; b)$

2 - عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية  $(\alpha ; \beta)$  حيث  $(7\alpha - 5\beta)(4\alpha - 3\beta) = 1300$   
 $\text{PGCD}(\alpha ; \beta) = 5$

## الحل 1 -

1 - ليكن  $\Delta$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | b \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} \Delta | 7a \\ \Delta | 5b \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} \Delta | 7a - 5b \\ \Delta | 4a - 3b \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} \Delta | x \\ \Delta | y \end{array} \right\}$$

منه :  $\Delta$  قاسم مشترك لـ  $x$  و  $y$  ..... (1)

ليكن الآن  $\Delta'$  قاسم مشترك لـ  $x$  و  $y$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' | x \\ \Delta' | y \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} \Delta' | 4x \\ \Delta' | 7y \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' | 3x \\ \Delta' | 5y \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' | 4x - 7y \\ \Delta' | 3x - 5y \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} \Delta' | 4(7a - 5b) - 7(4a - 3b) \\ \Delta' | 3(7a - 5b) - 5(4a - 3b) \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} \Delta' | b \\ \Delta' | a \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} \Delta' | b \\ \Delta' | a \end{array} \right\}$$

أي  $\Delta'$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  ..... (2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن مجموعة القواسم المشتركة لـ  $a$  و  $b$  هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة لـ  $x$  و  $y$

$$\text{PGCD}(x ; y) = \text{PGCD}(a ; b) \text{ إذن :}$$

$$\text{PGCD}(|x| ; |y|) = \text{PGCD}(a ; b) \text{ وخاصة :}$$

$$\text{PGCD}(7\alpha - 5\beta ; 4\alpha - 3\beta) = \text{PGCD}(\alpha ; \beta) \text{ فإن 2 - حسب السؤال (1)}$$

$$\text{PGCD}(7\alpha - 5\beta ; 4\alpha - 3\beta) = 5 \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7\alpha - 5\beta = 5k \\ 4\alpha - 3\beta = 5q \end{array} \right\} \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ و } q \in \mathbb{Z} \left. \begin{array}{l} \text{منه :} \\ \text{PGCD}(k ; q) = 1 \end{array} \right\}$$

$$(7\alpha - 5\beta)(4\alpha - 3\beta) = 1300 \text{ تصبح : } (5k)(5q) = 1300$$

$$25kq = 1300 \text{ أي :}$$

$$kq = 52 \text{ أي :}$$

$$(k ; q) \in \{(1 ; 52)(4 ; 13)(13 ; 4)(52 ; 1)(-1 ; -52)(-4 ; -13)(-13 ; -4)(-52 ; -1)\} \text{ منه :}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7\alpha - 5\beta - 5k = 0 \\ 4\alpha - 3\beta - 5q = 0 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} 7\alpha - 5\beta - 5k \\ 4\alpha - 3\beta - 5q \end{array} \right\} \text{ لنحل الجملة}$$

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -21 + 20 = -1 \text{ المحدد :}$$

إن : الجملة تقبل حلا وحيدا :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -5k \\ -3 & -5q \end{vmatrix}}{-1} = -(25q - 15k) = 15k - 25q \\ \beta = \frac{\begin{vmatrix} -5k & 7 \\ -5q & 4 \end{vmatrix}}{-1} = -(-20k + 35q) = 20k - 35q \end{cases}$$

جدول القيم الممكنة لـ  $\alpha$  و  $\beta$  :

k	q	15k	25q	$\alpha = 15k - 25q$	20k	35q	$\beta = 20k - 35q$
1	52	15	1300	-1285	20	1820	-1800
4	13	60	325	-265	80	455	-375
13	4	195	100	95	260	140	120
52	1	780	25	755	1040	35	1005
-1	-52	-15	-1300	1285	-20	-1820	1800
-4	-13	-60	-325	265	-80	-455	375
-13	-4	-195	-100	-95	-260	-140	-120
-52	-1	-780	-25	-755	-1040	-35	-1005

نتيجة : الثنائيات  $(\alpha; \beta)$  المطلوبة هي :

$$\{(-1285; -1800); (-265; -375); (95; 120); (755; 1005); (1285; 1800); (265; 375); (-95; -120); (-755; -1005)\}$$

التمرين 2

$n$  عدد طبيعي . نضع  $a = 3n + 4$  و  $b = 8n + 11$   
برهن أن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما

الحل 2

$$\begin{aligned} 3b - 8a &= 3(8n + 11) - 8(3n + 4) \\ &= 24n + 33 - 24n - 32 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إن : توجد ثنائية  $(\alpha; \beta) = (3; -8)$  من  $Z \times Z$  تحقق  $\alpha b + \beta a = 1$

منه : حسب نظرية بيزو فإن العددين  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما .

التمرين 3

$n$  عدد طبيعي . نضع  $a = 7n^2 + 2$  و  $b = 4n^2 + 1$   
برهن أن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما .

الحل 3

$$\begin{aligned} 4a - 7b &= 4(7n^2 + 2) - 7(4n^2 + 1) \\ &= 28n^2 + 8 - 28n^2 - 7 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إن : توجد ثنائية  $(\alpha; \beta) = (4; -7)$  من  $Z \times Z$  تحقق  $\alpha a + \beta b = 1$

إن : حسب نظرية بيزو فإن العددين  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما .

التمرين 4

$n$  عدد طبيعي غير معلوم .

1 - عين القيم الممكنة لـ  $\text{PGCD}(2n - 1; 9n + 4)$

2 - برهن أن إذا كان  $\text{PGCD}(2n - 1; 9n + 4) = 17$  فإن 17 يقسم  $n + 8$

3 - استنتج قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها  $\text{PGCD}(2n - 1; 9n + 4) = 17$

الحل 4

1 - ليكن  $\text{PGCD}(2n - 1; 9n + 4) = \Delta$

$$\Delta \mid 9n + 4 \quad \Delta \mid 2(9n + 4) \quad \Delta \mid 18n + 8 \quad \Delta \mid 18n + 8 - (18n - 9) \quad \Delta \mid 18n - 9 \quad \Delta \mid 2(2n - 1) \quad \Delta \mid 2n - 1$$

أي  $17 \mid \Delta$  إذن : القيم الممكنة لـ  $\Delta$  هي  $\{1; 17\}$

2- ليكن  $\text{PGCD}(2n-1; 9n+4) = 17$

$$\left. \begin{array}{l} 17 \mid 9n+4 \\ 17 \mid 9n+4 - (8n-4) \end{array} \right\} \text{منه } 17 \mid 9n+4 - (8n-4) \quad \left. \begin{array}{l} 17 \mid 9n+4 \\ 17 \mid 4(2n-1) \end{array} \right\} \text{أي } 17 \mid 4(2n-1) \quad \left. \begin{array}{l} 17 \mid 9n+4 \\ 17 \mid 2n-1 \end{array} \right\} \text{إذن : } 17 \mid 9n+4$$

أي  $17 \mid n+8$  هو المطلوب .

3- يكون  $\text{PGCD}(2n-1; 9n+4) = 17$  إذا و فقط إذا كان  $\left. \begin{array}{l} 17 \text{ يقسم } n+8 \\ \text{PGCD}(2n-1; 9n+4) \neq 1 \end{array} \right\}$

إذن :  $n+8 = 17k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

أي :  $n = 17k - 8$  حيث  $k \in \mathbb{N}^*$  لأن  $n$  عدد طبيعي .

$$2n-1 = 2(17k-8)-1 = 34k-17$$

$$9n+4 = 9(17k-8)+4 = 153k-68$$

$$\begin{array}{r|l} 153k-68 & 34k-17 \\ \hline 136k-68 & 4 \\ \hline 17k & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 34k-17 & 17k \\ \hline 34k & 2 \\ \hline -17 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 17k & 17 \\ \hline 17k & k \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن :  $\text{PGCD}(153k-68; 34k-17) = 17$

منه :  $\text{PGCD}(9n+4; 2n-1) = 17$

#### التمرين 5

$n$  عدد طبيعي . نضع  $b = n+2$  ;  $a = 5n^2 + 14n + 14$

1- برهن أن  $b$  قاسم لعدد  $5n^2 + 14n + 8$

2- استنتج أن  $b$  يقسم  $a$  معناه  $b$  يقسم 6

3- عين حسب قيم العدد  $n$  باقي قسمة  $a$  على  $b$

#### الحل 5

1- بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 5n^2 + 14n + 8 & n+2 \\ \hline 5n^2 + 10n & 5n+4 \\ \hline 4n+8 & \\ \hline 4n+8 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{إذن : } 5n^2 + 14n + 8 = (n+2)(5n+4) \\ \text{منه : } n+2 \text{ قاسم لـ } 5n^2 + 14n + 8 \\ \text{أي : } b \text{ قاسم لـ } 5n^2 + 14n + 8 \end{array}$$

2- بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 5n^2 + 14n + 14 & n+2 \\ \hline 5n^2 + 10n & 5n+4 \\ \hline 4n+14 & \\ \hline 4n+8 & \\ \hline 6 & \end{array} \quad \text{نتيجة : } \frac{5n^2 + 14n + 14}{n+2} = 5n+4 + \frac{6}{n+2}$$

إذن : يكون  $(n+2)$  قاسم لـ  $5n^2 + 14n + 14$  إذا و فقط إذا كان  $n+2$  قاسم لـ 6

أي :  $b$  يقسم  $a$  معناه  $b$  يقسم 6

3- نميز الحالات التالية :

(أ)  $b$  يقسم 6 إذن :  $b \in \{1; 2; 3; 6\}$

أي :  $n+2 \in \{1; 2; 3; 6\}$

منه :  $n \in \{0; 1; 4\}$  لأن  $n$  طبيعي .

في هذه الحالة  $b$  يقسم  $a$  إذن : باقي قسمة  $a$  على  $b$  هو 0

(ب)  $b$  لا يقسم 6 إذن :  $b \in \mathbb{N} - \{0; 1; 4\}$

في هذه الحالة باقي قسمة  $a$  على  $b$  هو كمايلي :

قيم $n$	2	3	$n \geq 5$
باقي قسمة $a$ على $b$	2	1	6

## التمرين 6 -

- $n$  عدد صحيح يختلف عن 1  
نضع  $a = 3n + 5$  و  $b = n - 1$   
1- تحقق أن  $a = 3b + 8$   
2- أوجد قيم  $n$  حتى يكون  $\frac{a}{b}$  عددا صحيحا .  
3- نفرض أن  $n$  عدد طبيعي . برهن أن  $\text{PGCD}(a; b)$  هو قاسم لـ 8  
ثم ناقش حسب قيم  $n$  القيم الممكنة لـ  $\text{PGCD}(a; b)$

## الحل - 6

$$\begin{aligned} 3b + 8 &= 3(n - 1) + 8 \\ &= 3n - 3 + 8 \\ &= 3n + 5 \\ &= a \end{aligned}$$

2- يكون  $\frac{a}{b}$  عددا صحيحا إذا و فقط إذا كان  $b$  قاسم لـ  $a$

$$\begin{array}{r|l} 3n+5 & n-1 \\ 3n-3 & 3 \\ \hline 8 & \end{array}$$

بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي  
إن : يكون باقي قسمة  $3n+5$  على  $n-1$  معدوم  
إذا و فقط إذا كان  $(n-1)$  قاسم لـ 8  
أي :  $(n-1) \in \{1; 2; 4; 8; -1; -2; -4; -8\}$   
منه :  $n \in \{2; 3; 5; 9; 0; -1; -3; -7\}$

3-  $n$  عدد طبيعي يختلف عن 1  
ليكن  $\Delta$  قاسم مشترك أكبر لـ  $a$  و  $b$   

$$\left. \begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | b \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | 3b \end{array} \right\} \text{ إذن : } \Delta | a - 3b \text{ أي } \Delta | 8 \text{ لأن } a = 3b + 8$$

نتيجة : إذا كان  $\text{PGCD}(a; b) = \Delta$  فإن  $\Delta | 8$   
 $\text{PGCD}(a; b) \in \{1; 2; 4; 8\}$  إذن :  
حسب خوارزمية إقليدس :

$$\begin{array}{r|l} 3n+5 & n-1 \\ 3n-3 & 3 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(n-1; 8)$$

منه الحالات التالية :

- (أ) إذا كان  $n-1 = 8k$  أي  $n = 8k + 1$  فإن  $\text{PGCD}(a; b) = 8$   
 (ب) إذا كان  $n-1 = 8k + 4$  أي  $n = 8k + 5$  فإن  $\text{PGCD}(a; b) = 4$   
 (ج) إذا كان  $n-1 = 4k + 2$  أي  $n = 4k + 3$  فإن  $\text{PGCD}(a; b) = 2$   
 (د) في الحالات الأخرى :  $\text{PGCD}(a; b) = 1$

أمثلة :

من أجل  $n = 45$  لدينا :  $n = 8(5) + 5$  إذن :  $\text{PGCD}(a; b) = 4$   
 من أجل  $n = 100$  لا يمكن كتابة  $n$  من أحد الأشكال  $8k + 1$  أو  $8k + 5$  أو  $4k + 3$   
 إذن :  $\text{PGCD}(a; b) = 1$   
 من أجل  $n = 43$  لدينا :  $n = 4(10) + 3$  إذن :  $\text{PGCD}(a; b) = 2$

## التمرين 7 -

- ٢ عدد طبيعي غير معدوم .  
نضع  $\alpha = n^2 + n$  و  $\beta = n + 2$   
1- برهن أن :  $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(n; \beta)$   
2- استنتج القيم الممكنة لـ  $\text{PGCD}(\alpha; \beta)$   
نعتبر العددين  $a$  و  $b$  حيث  $a = 3n^3 + 5n^2 + 2n$  و  $b = 3n^2 + 8n + 4$   
3- برهن أن العدد  $(3n + 2)$  هو قاسم مشترك للعددين  $a$  و  $b$   
4- استنتج حسب قيم  $n$  أن  $\text{PGCD}(a; b)$  هو  $(3n + 2)$  أو  $2(3n + 2)$   
5- عين  $\alpha$  و  $\beta$  علما أن :  $\text{PGCD}(a; b) = 41$

## فصل - 7

1 - بإجراء خوارزمية إقليدس كما يلي :

$$\begin{array}{r} n^2 + n \quad | \quad n + 2 \\ n^2 + 2n \quad | \quad n \\ \hline -n \end{array}$$

$$\text{PGCD}(n^2 + n ; n + 2) = \text{PGCD}(-n ; n + 2)$$

$$\text{PGCD}(\alpha ; \beta) = \text{PGCD}(|-\alpha| ; \beta) \quad \text{أي :}$$

$$\text{أي : } \text{PGCD}(\alpha ; \beta) = \text{PGCD}(n ; \beta) \text{ و هو المطلوب}$$

$$\begin{array}{r} n + 2 \quad | \quad n \\ n \quad | \quad 1 \\ \hline 2 \end{array} \quad \text{لدينا } \text{PGCD}(\alpha ; \beta) = \text{PGCD}(n ; \beta) \text{ منه حسب خوارزمية إقليدس :}$$

$$\text{إذن : القيم الممكنة لـ } \text{PGCD}(\alpha ; \beta) \text{ هي } \{1 ; 2\} \text{ كما يلي :}$$

$$\text{PGCD}(\alpha ; \beta) = \text{PGCD}(n ; 2)$$

نتيجة :

$$\text{إذا كان } n \text{ زوجي فإن } \text{PGCD}(n ; 2) = 2$$

$$\text{إذا كان } n \text{ فردي فإن } \text{PGCD}(n ; 2) = 1$$

3 - نجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r} 3n^2 + 8n + 4 \quad | \quad 3n + 2 \\ 3n^2 + 2n \quad | \quad n + 2 \\ \hline 6n + 4 \\ 6n + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3n^3 + 5n^2 + 2n \quad | \quad 3n + 2 \\ 3n^3 + 2n^2 \quad | \quad n^2 + n \\ \hline 3n^2 + 2n \\ 3n^2 + 2n \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3n^3 + 5n^2 + 2n \text{ قاسم لـ } (3n + 2) \\ 3n^2 + 8n + 4 \text{ قاسم لـ } (3n + 2) \end{array} \right\} \text{نتيجة :}$$

$$\text{إذن : } 3n + 2 \text{ هو قاسم مشترك لـ } 3n^3 + 5n^2 + 2n \text{ و } 3n^2 + 8n + 4$$

$$\left. \begin{array}{l} 3n^3 + 5n^2 + 2n = (3n + 2)(n^2 + n) \\ 3n^2 + 8n + 4 = (3n + 2)(n + 2) \end{array} \right\} \text{أي :}$$

$$\text{منه : } \text{PGCD}(3n^3 + 5n^2 + 2n ; 3n^2 + 8n + 4) = (3n + 2) \times \text{PGCD}(n^2 + n ; n + 2)$$

$$\text{لكن حسب السؤال (2) فإن } \text{PGCD}(n^2 + n ; n + 2) \in \{1 ; 2\}$$

$$\text{إذن : } \text{PGCD}(3n^3 + 5n^2 + 2n ; 3n^2 + 8n + 4) \in \{3n + 2 ; 2(3n + 2)\} \text{ كما يلي :}$$

$$\text{إذا كان } n \text{ زوجي : } \text{PGCD}(3n^3 + 5n^2 + 2n ; 3n^2 + 8n + 4) = 2(3n + 2)$$

$$\text{إذا كان } n \text{ فردي : } \text{PGCD}(3n^3 + 5n^2 + 2n ; 3n^2 + 8n + 4) = 3n + 2$$

$$5 - \text{PGCD}(a ; b) = 41 \text{ إذن : } 3n + 2 = 41$$

$$\text{منه : } 3n = 39$$

$$\text{أي : } n = 13$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = (13)^2 + 13 = 169 + 13 = 182 \\ \beta = 13 + 2 = 15 \end{array} \right\} \text{منه :}$$

## التمرين - 8

$$n \text{ عدد طبيعي . نضع : } a = 9n + 1 ; b = 9n - 1$$

$$1 - \text{أوجد علاقة بين } a \text{ و } b \text{ مستقلة عن } n$$

$$2 - \text{عين } \text{PGCD}(a ; b) \text{ في حالة } n \text{ عدد زوجي ثم في حالة } n \text{ عدد فردي .}$$

$$3 - \text{إستنتج باقي قسمة العدد } 81n^2 \text{ على } 4 \text{ في حالة } n \text{ عدد فردي .}$$

## الحل - 8

$$1 - a - b = 9n + 1 - (9n - 1) = 9n + 1 - 9n + 1 = 2$$

$$\text{نتيجة : من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : a - b = 2$$

$$2 - \text{ليكن } \text{PGCD}(a ; b) = \Delta$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | b \end{array} \right\} \text{إذن : } \Delta | a - b \text{ أي } \Delta | 2 \text{ منه } \Delta \in \{1 ; 2\}$$

$$\text{ليكن } n \text{ فردي إذن : } n = 2k + 1 \text{ حيث } k \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2(9k + 5) \\ b = 2(9k + 4) \end{array} \right\} \text{أي } \left. \begin{array}{l} a = 18k + 10 \\ b = 18k + 8 \end{array} \right\} \text{أي } \left. \begin{array}{l} a = 9(2k + 1) + 1 \\ b = 9(2k + 1) - 1 \end{array} \right\} \text{منه :}$$

إذن :  $\text{PGCD}(a; b) = 2$

ليكن  $n$  زوجي إذن :  $n = 2k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

منه :  $\left. \begin{array}{l} a = 9(2k) + 1 \\ b = 9(2k) - 1 \end{array} \right\}$  إذن :  $\left. \begin{array}{l} a = 18k + 1 \\ b = 18k - 1 \end{array} \right\}$  أي  $a$  فردي  $b$  فردي

إذن :  $\text{PGCD}(a; b) = 1$

خلاصة : إذا كان  $n$  زوجي فإن  $\text{PGCD}(a; b) = 1$

إذا كان  $n$  فردي فإن  $\text{PGCD}(a; b) = 2$

$n - 3$  عدد فردي إذن :  $n = 2k + 1$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 81n^2 &= 81(2k+1)^2 = 81(4k^2 + 4k + 1) = 4 \times 81k^2 + 4 \times 81k + 81 \\ &= 4 \times 81k^2 + 4 \times 81k + 80 + 1 \\ &= 4(81k^2 + 81k + 20) + 1 \end{aligned}$$

$$k' = 81k^2 + 81k + 20 \text{ حيث } = 4k' + 1$$

إذن : باقي قسمة  $81n^2$  على 4 هو 1 من أجل  $n$  فردي .

### التمرين - 9

$n$  عدد طبيعي . نضع  $a = 7n^2 + 4$  ;  $b = n^2 + 1$

1- برهن أن كل قاسم مشترك للعددين  $a$  و  $b$  هو قاسم لـ 3

2- اشرح لماذا يكون  $n^2 = 3k - 1$  في حالة  $\text{PGCD}(a; b) = 3$

3- بين باستعمال فصل الحالات أن هذا غير ممكن .

4- استنتج  $\text{PGCD}(a; b)$

### الحل - 9

1- ليكن  $\Delta$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | b \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} \Delta | 7b - a \\ \Delta | 7(n^2 + 1) - (7n^2 + 4) \end{array} \right\} \text{ أي } \Delta | 7n^2 + 7 - 7n^2 - 4$$

منه :  $\Delta | 3$  و هو المطلوب .

2- في حالة  $\text{PGCD}(a; b) = 3$  فإن 3 يقسم  $b$  أي :  $b = 3k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

منه :  $n^2 + 1 = 3k$  أي  $n^2 = 3k - 1$  و هو المطلوب

3- لنثبت أن من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن  $n^2$  لا يكتب من الشكل  $3k - 1$

الحالة (1)  $n = 3p$

$$\text{إذن : } n^2 = 9p^2 = 3(3p^2) = 3k$$

الحالة (2)  $n = 3p + 1$

$$\text{إذن : } n^2 = (3p + 1)^2 = 9p^2 + 6p + 1 = 3(3p^2 + 2p) + 1 = 3k + 1$$

الحالة (3)  $n = 3p + 2$

$$\text{إذن : } n^2 = (3p + 2)^2 = 9p^2 + 12p + 4 = 9p^2 + 12p + 3 + 1 = 3(3p^2 + 4p + 1) + 1 = 3k + 1$$

خلاصة : في كل الحالات العدد  $n^2$  لا يكتب من الشكل  $3k - 1$

4- بما أن العدد  $n^2$  لا يمكن أن يكتب من الشكل  $3k - 1$  فإن  $n^2 + 1$  لا يمكن أن يكتب من الشكل  $3k$  أي العدد 3 لا يمكن أن يقسم  $b$

منه :  $\text{PGCD}(a; b) \neq 3$

أي :  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  (أوليين العددين  $a$  و  $b$  أوليين فيما بينهما)

### التمرين - 10

$x$  و  $y$  عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما

نضع  $s = x + y$  و  $p = xy$

1- برهن أن  $x$  و  $s$  أوليان فيما بينهما و أن  $y$  و  $s$  أوليان فيما بينهما

2- باستعمال البرهان بالخلف برهن أن  $s$  و  $p$  أوليان فيما بينهما

3- برهن أن العددين  $s$  و  $p$  من شقيقتين مختلفتين أحدهما زوجي و الآخر فردي

4- عين القواسم الموجبة للعدد 84



- 5 - عين الأعداد الأولية فيما بينها  $x$  و  $y$  حيث  $xy = 84$   
 6 - عين عددين طبيعيين  $a$  و  $b$  يحققان الشرطان التاليان  $\left. \begin{array}{l} a + b = 84 \\ ab = d^2 \end{array} \right\}$  حيث  $d = \text{PGCD}(a; b)$   
 الحل - 10

1 -  $x$  و  $y$  أوليان فيما بينهما إذن حسب بيزو فإن توجد ثنائية  $(\alpha; \beta)$  من الأعداد الصحيحة حيث  $1 = \alpha x + \beta y$  ..... (1)

لدينا  $s = x + y$  إذن :  $\left. \begin{array}{l} \alpha s = \alpha x + \alpha y \\ \beta s = \beta x + \beta y \end{array} \right\}$  ..... (2)  
 ..... (3)

بطرح (2) من (1) نحصل على :  $1 - \alpha s = \alpha x + \beta y - \alpha x - \alpha y$

$$1 - \alpha s = (\beta - \alpha) y \quad \text{أي :}$$

$$1 = \alpha s + (\beta - \alpha) y \quad \text{أي :}$$

إذن : توجد ثنائية  $(\alpha; \beta - \alpha)$  من الأعداد الصحيحة حيث  $1 = \alpha s + (\beta - \alpha) y$  إذن :  $s$  و  $y$  أوليان فيما بينهما .

بطرح (3) من (1) نحصل على :  $1 - \beta s = \alpha x + \beta y - \beta x - \beta y$

$$1 - \beta s = (\alpha - \beta) x \quad \text{أي :}$$

$$1 = \beta s + (\alpha - \beta) x \quad \text{أي :}$$

إذن : توجد ثنائية  $(\beta; \alpha - \beta)$  من الأعداد الصحيحة حيث  $1 = \beta s + (\alpha - \beta) x$

إذن :  $s$  و  $x$  أوليان فيما بينهما .

خلاصة :  $s$  و  $x$  أوليان فيما بينهما .

$s$  و  $y$  أوليان فيما بينهما .

2 - ليكن  $\text{PGCD}(s; p) = \Delta$  حيث  $\Delta > 1$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta | x + y \\ \Delta | xy \end{array} \right\} \quad \text{إذن :} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta | s \\ \Delta | p \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta | x^2 + xy \\ \Delta | xy \end{array} \right\} \quad \text{منه}$$

$$\Delta | x^2 + xy - xy \quad \text{أي}$$

$$\Delta | x^2 \quad \text{أي} \quad \text{تناقض لأن } \text{PGCD}(x; s) = 1$$

منه : العددين  $s$  و  $p$  أوليان فيما بينهما .

3 -  $s$  و  $p$  أوليان فيما بينهما إذن : لا يمكن أن يكونا زوجيين معا .

هل يمكن أن يكون  $p$  فردي و  $s$  فردي ؟

إذا كان  $p$  فردي فإن  $x$  فردي و  $y$  فردي إذن  $s$  زوجي

منه : لا يمكن أن يكون  $p$  فردي و  $s$  فردي .

خلاصة : العددين  $s$  و  $p$  من شفتين مختلفتين .

4 - قواسم 84 الموجبة هي :  $\{1; 2; 3; 4; 6; 7; 12; 14; 21; 28; 42; 84\}$

5 -  $\left. \begin{array}{l} xy = 84 \\ x \text{ و } y \text{ أوليان فيما بينهما} \end{array} \right\}$  إذن :  $(x; y) \in \{(1; 84); (3; 28); (4; 21); (7; 12); (12; 7); (21; 4); (28; 3); (84; 1)\}$

6 -  $\left. \begin{array}{l} a + b = 84 \\ ab = d^2 \end{array} \right\}$

نضع  $\left. \begin{array}{l} a = dx \\ b = dy \end{array} \right\}$  حيث  $\text{PGCD}(x; y) = 1$

إذن  $\left. \begin{array}{l} dx + dy = 84 \\ dx dy = d^2 \end{array} \right\}$

$$\left. \begin{array}{l} d(x+y) = 84 \\ x y d^2 = d^2 \end{array} \right\} \text{ أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} d(x+y) = 84 \\ x y = 1 \end{array} \right\} \text{ أي}$$

$$x = y = 1 \text{ منه}$$

$$\text{إذن : } 2d = 84 \text{ أي } d = 42$$

$$\text{منه : } a = 42 \text{ و } b = 42$$

$$\text{تحقيق : } \text{PGCD}(42; 42) = 42$$

$$\text{إذن : } d = 42 \text{ منه : } d^2 = 42 \times 42$$

### التمرين - 11

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  نضع :  $S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$

$$1 - \text{برهن بالتراجع أن من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* : S_n = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$2 - \text{تحقق أن : } \text{PGCD}(k; k+1) = 1 \text{ حيث } k \in \mathbb{N}^*$$

$$3 - \text{برهن أن من أجل } k \in \mathbb{N}^* : \text{PGCD}(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2$$

$$4 - \text{عين } \text{PGCD}(2k+1; 2k+3) \text{ من أجل } k \in \mathbb{N}^*$$

$$5 - \text{أحسب } \text{PGCD}(S_{2k+1}; S_{2k+2}) \text{ من أجل } k \in \mathbb{N}$$

$$6 - \text{استنتج حسب قيم العدد الطبيعي } n : \text{PGCD}(S_n; S_{n+1})$$

ملاحظة : في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية :  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  يكافئ  $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$

### الحل - 11

$$1 - \text{البرهان بالتراجع : لنكن الخاصية : } 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$\text{من أجل } n = 1 : \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \left[ \frac{1(2)}{2} \right]^2 = 1$$

إذن الخاصية محققة من أجل  $n = 1$ .

$$\text{نفرض أن : } 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \text{ من أجل } n > 1$$

$$\text{هل : } 1 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$$

$$1 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2 \left[ \left( \frac{n}{2} \right)^2 + n + 1 \right]$$

$$= (n+1)^2 \left( \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \right)$$

$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}$$

$$= \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

$$\text{نتيجة : من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* : S_n = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$2 - \text{من أجل كل } k \in \mathbb{N}^* \text{ لدينا : } (k+1) + (-1)k = 1$$

إذن : توجد ثنائية  $(\alpha; \beta) = (1; -1)$  من الأعداد الصحيحة

$$\text{تحقق } \alpha(k+1) + \beta k = 1$$

منه : حسب بيزو فإن  $\text{PGCD}(k+1; k) = 1$

$$S_{2k} = \left[ \frac{2k(2k+1)}{2} \right]^2 = k^2(2k+1)^2 \quad : k \in \mathbb{N}^* \text{ ليكن } 3 -$$

$$S_{2k+1} = \left[ \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} \right]^2 = \left[ \frac{2(k+1)(2k+1)}{2} \right]^2 = (k+1)^2(2k+1)^2$$

$$\text{PGCD}(S_{2k}; S_{2k+1}) = \text{PGCD}(k^2(2k+1)^2; (k+1)^2(2k+1)^2) \quad \text{إذن :}$$

$$= (2k+1)^2 \text{PGCD}(k^2; (k+1)^2)$$

$$\text{PGCD}(k; k+1) = 1 \quad \text{لأن } = (2k+1)^2 \text{PGCD}(k; k+1)$$

$$= (2k+1)^2$$

4 - بإجراء القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{r|l} 2k+3 & 2k+1 \\ \hline 2k+1 & 1 \end{array} \quad \text{PGCD}(2k+3; 2k+1) = \text{PGCD}(2k+1; 2)$$

لكن من أجل كل  $k$  من  $\mathbb{N}$  فإن  $(2k+1)$  فردي .

$$\text{PGCD}(2k+1; 2) = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\text{PGCD}(2k+3; 2k+1) = 1 \quad \text{منه :}$$

$$S_{2k+1} = (k+1)^2(2k+1)^2 \quad 5 -$$

$$S_{2k+2} = \left[ \frac{(2k+2)(2k+3)}{2} \right]^2 = \left[ \frac{2(k+1)(2k+3)}{2} \right]^2 = (k+1)^2(2k+3)^2$$

$$\text{PGCD}(S_{2k+1}; S_{2k+2}) = \text{PGCD}((k+1)^2(2k+1)^2; (k+1)^2(2k+3)^2) \quad \text{إذن :}$$

$$= (k+1)^2 \text{PGCD}((2k+1)^2; (2k+3)^2)$$

$$\text{PGCD}(2k+1; 2k+3) = 1 \quad \text{لأن } = (k+1)^2$$

6 - نميز حالتين :

$$\text{PGCD}(S_n; S_{n+1}) = \text{PGCD}(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2 = (n+1)^2 \quad \text{منه } n = 2k \quad \text{زوجي إذن :}$$

$$\text{PGCD}(S_n; S_{n+1}) = \text{PGCD}(S_{2k+1}; S_{2k+2}) = (k+1)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad \text{منه } n = 2k+1 \quad \text{فردي إذن :}$$

## التمرين 12 -

$n$  عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي (E) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكتب من الشكل  $9 + a^2$  حيث  $a \in \mathbb{N}^*$

لتكن المعادلة  $9 + a^2 = 2^n$  ..... (I) ذات المجهول  $a$  حيث  $n$  عدد طبيعي أكبر من 3 .

1 - برهن أن إذا كان  $a$  حلاً للمعادلة (I) فإن  $a$  فردي .

2 - باستعمال القسمة على 4 برهن أن المعادلة (I) لا تقبل حلاً .

لتكن المعادلة  $9 + a^2 = 3^n$  ..... (II) ذات المجهول  $a$  حيث  $n$  عدد طبيعي أكبر من 2

3 - برهن بالتراجع أن من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $3^{2n} - 1$  يقبل القسمة على 4

4 - إستنتج بواقى القسمة الإقليدية لـ  $3^{2n}$  و  $3^{2n+1}$  على 4

5 - برهن أن إذا كان  $a$  حلاً للمعادلة (II) فإن  $a$  زوجي وإستنتج أن  $n$  زوجي .

6 - حلل العدد  $3^{2p} - a^2$  ثم إستنتج أن المعادلة (II) لا تقبل حلاً

لتكن المعادلة  $9 + a^2 = 5^n$  ..... (III) ذات المجهول  $a$  و  $n$  عدد طبيعي أكبر من 1

7 - باستعمال القسمة على 3 برهن أن إذا كان  $n$  فردي فإن المعادلة (III) لا تقبل حلاً .

8 - في حالة  $n$  زوجي برهن أن يوجد عدد طبيعي وحيد  $a$  حيث يكون العدد  $9 + a^2$  من قوى العدد 5

## الحل - 12

1 - ليكن  $a$  حل للمعادلة (I) إذن :  $9 + a^2 = 2^n$

$$9 = 2^n - a^2 \quad \text{منه :}$$

إذا كان  $a$  زوجي نضع  $a = 2k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

$$9 = 2^n - (2k)^2 \quad \text{منه :}$$

$$9 - 2^n = 4k^2 \quad \text{أي}$$

أي  $2(2^{n-1} - 2k^2) - 9$  تناقض لأن 2 لا يقسم 9  
نتيجة : a ليس زوجي

إذن : إذا كان a حل للمعادلة (I) فإن a فردي

2- ليكن a حل للمعادلة I إذن :  $a = 2k + 1$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

المعادلة (I) تكافئ  $9 + (2k + 1)^2 = 2^n$

تكافئ  $9 + 4k^2 + 4k + 1 = 2^n$

تكافئ  $10 + 4k^2 + 4k = 2^n$

تكافئ  $10 = 2^n - 4k^2 - 4k$

تكافئ  $10 = 4(2^{n-2} - k^2 - k)$  تناقض لأن 4 لا يقسم 10

نتيجة :  $a = 2k + 1$  لا يمكن أن يكون حلاً للمعادلة (I)

خلاصة : المعادلة (I) لا تقبل حلولاً .

3- البرهان بالتراجع : من أجل  $n > 2$  :  $3^{2n} - 1$  مضاعف 4

من أجل  $n = 3$  :  $3^{2(3)} - 1 = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$

بما أن  $728 = 4 \times 182$  فإن الخاصية صحيحة من أجل  $n = 3$

نفرض أن  $3^{2n} - 1$  مضاعف 4 من أجل  $n > 3$  أي  $3^{2n} - 1 = 4k$

هل  $3^{2(n+1)} - 1$  مضاعف 4 ؟

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n} \times 3^2 - 1$$

$$= 9 \times 3^{2n} - 1$$

$$= 8 \times 3^{2n} + 3^{2n} - 1$$

$$= 8 \times 3^{2n} + 4k \quad \text{حسب فرضية التراجع} \quad 3^{2n} - 1 = 4k$$

$$= 4(2 \times 3^{2n} + k)$$

$$= 4k'$$

منه الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل  $n > 2$  فإن  $3^{2n} - 1$  مضاعف 4

4-  $3^{2n} - 1 = 4k$  إذن :  $3^{2n} = 4k + 1$  منه باقي قسمة  $3^{2n}$  على 4 هو 1

$3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n}$  إذن :  $3^{2n+1} = 3(4k + 1)$  لأن  $3^{2n} = 4k + 1$

منه :  $3^{2n+1} = 12k + 3$

أي :  $3^{2n+1} = 4k' + 3$  حيث  $k' = 3k$

إذن : باقي قسمة  $3^{2n+1}$  على 4 هو 3

5- ليكن a حل للمعادلة (II)

إذا كان a فردي نضع  $a = 2k + 1$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

المعادلة (II) تكافئ :  $9 + (2k + 1)^2 = 3^n$

تكافئ  $9 + 4k^2 + 4k + 1 = 3^n$

تكافئ  $10 + 4k^2 + 4k = 3^n$

تكافئ  $\left. \begin{aligned} 10 + 4k^2 + 4k &= 4q + 1 \text{ إذا كان } n \text{ زوجي} \\ 10 + 4k^2 + 4k &= 4q + 3 \text{ إذا كان } n \text{ فردي} \end{aligned} \right\}$

تكافئ  $\left. \begin{aligned} 9 &= 4(q - k^2 - k) \text{ إذا كان } n \text{ زوجي} \\ 7 &= 4(q - k^2 - k) \text{ إذا كان } n \text{ فردي} \end{aligned} \right\}$

لكن 4 لا يقسم 9 و 4 لا يقسم 7

إذن : تناقض

منه : a ليس فردي

نتيجة : إذا كان a حل للمعادلة (II) فإن a زوجي .

في هذه الحالة  $a = 2k$

إذن : المعادلة تكافئ  $9 + 4k^2 = 3^n$

تكافئ  $\left. \begin{aligned} 9 + 4k^2 &= 4q + 1 \text{ إذا كان } n \text{ زوجي} \\ 9 + 4k^2 &= 4q + 3 \text{ إذا كان } n \text{ فردي} \end{aligned} \right\}$

تكافئ } أو  $8 = 4(q - k^2)$  إذا كان  $n$  زوجي .

لكن 4 لا يقسم 6 إذن :  $n$  ليس فردي .

منه :  $n$  زوجي

$$3^{2p} - a^2 = (3^p - a)(3^p + a) \quad - 6$$

ليكن  $a$  حل للمعادلة (II) حيث  $n = 2p$  ( $p \neq 0$ )

$$9 = 3^{2p} - a^2 \quad \text{المعادلة (II) تكافئ}$$

$$9 = (3^p - a)(3^p + a) \quad \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^p - a = 1 \\ 3^p + a = 9 \end{array} \right\} \text{تكافئ لأن } p \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times 3^p = 10 \\ a = 9 - 3^p \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^p = 5 \\ a = 9 - 3^p \end{array} \right\} \text{تكافئ } 3^p = 5 \text{ تناقض . لأن 3 لا يقسم 5}$$

نتيجة : المعادلة (II) لا تقبل حولا

7 - ليكن  $n$  فردي إذن :  $n = 2k + 1$  حيث  $k \in \mathbb{N}^*$  لأن  $n > 2$

$$9 + a^2 = 5^{2k+1} \quad \text{المعادلة (III) تكافئ}$$

$$9 = 5^{2k+1} - a^2 \quad \text{تكافئ } 9 = 5^{2k+1} - a^2 \text{ تناقض لأن } 5^{2k+1} - a^2 \text{ لا يقبل القسمة على 3}$$

إذن : إذا كان  $n$  فردي فإن المعادلة (III) لا تقبل حلا

8 - ليكن  $n$  زوجي حيث  $n = 2k$

$$9 + a^2 = 5^{2k} \quad \text{المعادلة (III) تكافئ}$$

$$9 = (5^k - a)(5^k + a) \quad \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5^k - a = 1 \\ 5^k + a = 9 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times 5^k = 10 \\ a = 5^k - 1 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5^k = 5 \\ a = 5^k - 1 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} k = 1 \\ a = 4 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

نتيجة : المعادلة  $9 + a^2 = 5^n$  تقبل حلا وحيدا  $a = 4$

إذن : يوجد عدد طبيعي وحيد  $a$  حيث يكون  $9 + a^2$  من قوى العدد 5

### التمرين 13

$a$  عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و  $k$  عدد طبيعي كفي .

1 - أثبت أن إذا كان  $d$  قاسم للعددين  $(a^k - 1)$  و  $a^{k+1} - 1$  فإن  $d$  قاسم للعدد  $a^k(a - 1)$

2 - أعط القيم الممكنة لـ  $\text{PGCD}(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1)$

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $\left. \begin{array}{l} u_1 = 1 \\ u_0 = 0 \end{array} \right\}$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$

3 - تحقق أن العددين  $u_2$  و  $u_3$  أوليان فيما بينهما .

4 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 4u_n + 1$

5 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n$  هو عدد طبيعي

6 - عين  $\text{PGCD}(u_n ; u_{n+1})$

نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ  $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

7 - برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية ثم أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$

8 - استنتج  $\text{PGCD}(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1)$

## الحل - 13

1 - ليكن  $d$  قاسم للعددين  $a^{k+1} - 1$  و  $a^k - 1$   
 إذن :  $d$  قاسم لـ  $(a^{k+1} - 1) - (a^k - 1)$   
 منه :  $d$  قاسم لـ  $a^{k+1} - a^k$   
 أي :  $d$  قاسم لـ  $a^k(a - 1)$

2 - ليكن  $\text{PGCD}(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1) = \Delta$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \mid 4^{k+1} - 1 \\ \Delta \mid 4^k - 1 \end{array} \right\} \text{ إذن : } \Delta \mid 4^{k+1} - 1 - (4^k - 1)$$

$$\Delta \mid 4^{k+1} - 4^k \quad \text{أي}$$

$$\Delta \mid 4^k(4 - 1) \quad \text{أي}$$

$$\Delta \mid 3 \times 4^k \quad \text{أي}$$

نتيجة : القيم الممكنة لـ  $\text{PGCD}(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1)$  هي قواسم العدد  $3 \times 4^k$

$$u_2 = 5 u_1 - 4 u_0 = 5 - 0 = 5 \quad - 3$$

$$u_3 = 5 u_2 - 4 u_1 = 5(5) - 4(1) = 21$$

$\text{PGCD}(5 ; 21) = 1$  إذن :  $u_2$  و  $u_3$  أوليان فيما بينهما .

4 - البرهان بالتراجع عن الخاصية :  $u_{n+1} = 4 u_n + 1$

$$\text{من أجل } n = 0 : u_1 = 1 = 4(0) + 1$$

$$\text{إذن : } u_1 = 4 u_0 + 1$$

منه الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$

$$\text{من أجل } n = 1 : u_2 = 5 = 4(1) + 1$$

$$\text{إذن : } u_2 = 4 u_1 + 1$$

منه الخاصية صحيحة من أجل  $n = 1$

$$\text{نفرض أن : } u_{n+1} = 4 u_n + 1 \text{ من أجل } n > 1$$

$$\text{هل } u_{n+2} = 4 u_{n+1} + 1 ?$$

$$\text{لدينا : } u_{n+2} = 5 u_{n+1} - 4 u_n \text{ ..... (1)}$$

لكن حسب فرضية التراجع :  $u_{n+1} = 4 u_n + 1$  منه  $4 u_n = u_{n+1} - 1$

$$\text{منه : المساواة (1) تصبح : } u_{n+2} = 5 u_{n+1} - (u_{n+1} - 1)$$

$$u_{n+2} = 4 u_{n+1} + 1 \quad \text{أي}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 4 u_n + 1$

5 - البرهان بالتراجع عن الخاصية :  $u_n$  عدد طبيعي

من أجل  $n = 0$  ؛  $n = 1$  ؛  $n = 2$  الخاصية محققة لأن  $u_2$  ؛  $u_1$  ؛  $u_0$  أعداد طبيعية

نفرض أن  $u_n$  عدد طبيعي من أجل  $n > 2$

هل  $u_{n+1}$  عدد طبيعي ؟

$$u_n \in \mathbb{N} \text{ إذن : } 4 \times u_n \in \mathbb{N}$$

$$\text{منه : } (4 u_n + 1) \in \mathbb{N} \text{ أي } u_{n+1} \in \mathbb{N}$$

أي الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $u_n$  عدد طبيعي .

6 - حسب السؤال (4) فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 4 u_n + 1$

$$u_{n+1} - 4 u_n = 1 \quad \text{منه}$$

إذن : توجد ثنائية  $(\alpha ; \beta) = (1 ; -4)$  من الأعداد الصحيحة حيث  $\alpha u_{n+1} + \beta u_n = 1$

إذن : حسب بيزو فإن  $u_n$  و  $u_{n+1}$  أوليان فيما بينهما

$$\text{أي } \text{PGCD}(u_{n+1} ; u_n) = 1$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3}$$

- 7

$$= (4 u_n + 1) + \frac{1}{3}$$

$$= 4 u_n + \frac{4}{3}$$

$$= 4 \left( u_n + \frac{1}{3} \right)$$

$$= 4 v_n$$

إذن :  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 4 و حدما الأول  $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$$v_n = \frac{1}{3} (4)^n \quad \text{منه :}$$

$$u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (4)^n \quad \text{أي :}$$

$$u_n = \frac{1}{3} (4)^n - \frac{1}{3} \quad \text{منه :}$$

$$u_n = \frac{1}{3} (4^n - 1) \quad \text{أي}$$

8 - حسب السؤال (7) فإن :

$$\left. \begin{array}{l} 3 u_k = 4^k - 1 \\ 3 u_{k+1} = 4^{k+1} - 1 \end{array} \right\} \quad \text{منه} \quad \left. \begin{array}{l} u_k = \frac{1}{3} (4^k - 1) \\ u_{k+1} = \frac{1}{3} (4^{k+1} - 1) \end{array} \right\}$$

$$\text{إذن : } \text{PGCD}(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1) = \text{PGCD}(3 u_{k+1} ; 3 u_k) = 3 \text{ PGCD}(u_{k+1} ; u_k)$$

$$\text{PGCD}(u_{k+1} ; u_k) = 1 \quad \text{لأن } = 3$$

#### التمرين 14 -

نقول عن العدد الطبيعي  $p$  أنه أولي إذا وفقط إذا قبل قاسمين بالضبط هما 1 و  $p$ .  
نعتبر في المجموعة  $N^2$  المعادلة  $x^2 + y^2 = p^2$  ..... (E) ذات المجهولين الطبيعيين  $x$  و  $y$  حيث  $p$  عدد طبيعي أولي

1 - نضع  $p = 2$  بين أن المعادلة (E) لا تقبل حلولاً في  $N^* \times N^*$

نفرض أن  $p \neq 2$  و  $(x ; y)$  حل للمعادلة (E)

2 - برهن أن العددين  $x$  و  $y$  أحدهما زوجي والآخر فردي .

3 - برهن أن  $p$  لا يقسم  $x$  ولا يقسم  $y$  .

4 - برهن أن  $\text{PGCD}(x^2 ; y^2)$  يقسم  $p^2$

5 - استنتج أن العددين  $x$  و  $y$  أوليان فيما بينهما .

نفرض أن  $p$  هو مجموع مربعين تامين غير معدومين أي  $p = u^2 + v^2$  حيث  $u$  و  $v$  عددين طبيعيين غير معدومين

6 - تحقق أن الثنائية  $(|u^2 - v^2| ; 2uv)$  حل للمعادلة (E)

7 - أعط حلاً للمعادلة (E) من أجل  $p = 5$  ثم في حالة  $p = 13$

#### الحل - 14

1 - من أجل  $p = 2$  المعادلة (E) تكافئ

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 = 4 - y^2$$

$$x^2 = (2 - y)(2 + y) \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{إذن : } 2 - y > 0 \quad \text{لأن } x^2 > 0$$

$$\text{منه : } y < 2$$

$$\text{أي : } y = 1 \quad \text{لأن } y \text{ غير معدوم .}$$

لكن من أجل  $y = 1$  نحصل على :  $x^2 = 3$  إذن : لا يوجد  $x$  من  $N^*$  يحقق المعادلة

نتيجة : المعادلة (E) لا تقبل حلولاً في  $N^* \times N^*$  من أجل  $p = 2$

2 - إذا كان  $(x ; y)$  حلاً للمعادلة (E) فإن  $x^2 + y^2 = p^2$

لدينا  $p$  فردي لأن  $p$  أولي و  $p \neq 2$  إذن :  $p^2$  فردي

إذا كان  $x$  زوجي و  $y$  زوجي فإن  $x^2$  زوجي و  $y^2$  زوجي أي  $x^2 + y^2$  زوجي . تناقض

إذا كان  $x$  فردي و  $y$  فردي فإن  $x^2$  فردي و  $y^2$  فردي أي  $x^2 + y^2$  زوجي . تناقض .  
نتيجة : إذا كان  $(x; y)$  حلا للمعادلة (E) فإن  $x$  و  $y$  أحدهما زوجي و الآخر فردي  
3 - نفرض أن  $p$  يقسم  $x$  ( $x \neq 0$ )

إذن : يوجد عدد طبيعي  $\alpha$  حيث  $x = p\alpha$  منه  $x^2 = p^2\alpha^2$

إذن : المعادلة (E) تكافئ  $p^2\alpha^2 + y^2 = p^2$

$y^2 = p^2 - p^2\alpha^2$  تكافئ

$y^2 = p^2(1 - \alpha^2)$  تكافئ

$y^2 = p^2(1 - \alpha)(1 + \alpha)$  تكافئ

لكن  $y^2 > 0$  إذن :  $1 - \alpha > 0$

أي  $\alpha < 1$

أي  $\alpha = 0$

منه  $x = 0$  تناقض . إذن :  $p$  لا يقسم  $x$

نفرض الآن أن  $p$  يقسم  $y$  ( $y \neq 0$ )

إذن : يوجد عدد طبيعي  $\alpha$  حيث  $y = p\alpha$  منه  $y^2 = p^2\alpha^2$

إذن : المعادلة (E) تكافئ  $x^2 + p^2\alpha^2 = p^2$

$x^2 = p^2(1 - \alpha^2)$  تكافئ

$x^2 = p^2(1 - \alpha)(1 + \alpha)$  تكافئ

إذن :  $1 - \alpha > 0$  لأن  $x^2 > 0$

إذن :  $\alpha < 1$

منه  $\alpha = 0$  أي  $y = 0$  تناقض إذن :  $p$  لا يقسم  $y$

نتيجة : إذا كان  $(x; y)$  حلا للمعادلة (E) فإن  $p$  لا يقسم  $x$  و لا يقسم  $y$

4 - ليكن  $\text{PGCD}(x^2; y^2) = \Delta$

إذن :  $\Delta | x^2 + y^2$  منه  $\Delta | p^2$  و هو المطلوب

5 - حسب السؤال (4) فإن  $\text{PGCD}(x^2; y^2)$  يقسم  $p^2$

إذن :  $\text{PGCD}(x^2; y^2) \in \{1; p; p^2\}$  لأن  $p$  أولي إذن قواسم  $p^2$  هي  $\{1; p; p^2\}$

لكن  $p$  لا يقسم  $x$  و لا يقسم  $y$

إذن :  $p$  لا يقسم  $x^2$  و لا يقسم  $y^2$

منه :  $\text{PGCD}(x^2; y^2) \neq p$  و  $\text{PGCD}(x^2; y^2) \neq p^2$

أي :  $\text{PGCD}(x^2; y^2) = 1$

منه :  $\text{PGCD}(x; y) = 1$

أي :  $x$  و  $y$  أوليان فيما بينهما .

6 - ليكن  $p = u^2 + v^2$  حيث  $u \geq v$  إذن :  $|u^2 - v^2| = u^2 - v^2$

لدينا :  $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2$

$= u^4 + 2u^2v^2 + v^4$

$= (u^2 + v^2)^2$

$= p^2$

إذن : الثانية  $(|u^2 - v^2|; 2uv)$  حل للمعادلة (E)

7 - من أجل  $p = 5$  لدينا :  $(4)^2 + (3)^2 = 16 + 9$

$= 25$

$= (5)^2$

إذن :  $(4; 3)$  حل للمعادلة (E)

من أجل  $p = 13$  لدينا :  $(12)^2 + (5)^2 = 144 + 25$

$= 169$



(13)<sup>2</sup>

إن : (12 ; 5) حل للمعادلة (E)

التمرين - 15

لتكن  $(x_n)$  و  $(y_n)$  متتاليتين معرفتين بـ  $x_0 = 1$  ؛  $y_0 = 8$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3} x_n + \frac{1}{3} y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3} x_n + \frac{8}{3} y_n + 5 \end{cases}$$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد  $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$  نعتبر المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $5x - y + 3 = 0$ 1 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن النقطة  $M_n(x_n ; y_n)$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$ 2 - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $x_{n+1} = 4x_n + 2$ 3 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $x_n \in \mathbb{N}$ 4 - استنتج أن  $y_n \in \mathbb{N}$ نضع  $\text{PGCD}(x_n ; y_n) = d$ 5 - ما هي القيم الممكنة لـ  $d$ 6 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $x_n = \frac{5}{3} \times 4^n - \frac{2}{3}$ 7 - استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $5 \times 4^n - 2$  مضاعف 6

الحل - 15

1 - لتكن الخاصية : من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  : النقطة  $M_n(x_n ; y_n)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ من أجل  $n = 0$  :  $x_0 = 1$  ؛  $y_0 = 8$ إذن :  $5(1) - (8) + 3 = -3 + 3 = 0$  :  $M_0(x_0 ; y_0)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ 

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3}(1) + \frac{1}{3}(8) + 1 = 6 \\ y_1 = \frac{20}{3}(1) + \frac{8}{3}(8) + 5 = 33 \end{cases} \quad \text{من أجل } n = 1$$

إذن :  $5(6) - (33) + 3 = 33 - 33 = 0$  :  $M_1(x_1 ; y_1)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$  و  $n = 1$ نفرض أن النقطة  $M_n(x_n ; y_n)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  من أجل  $n > 1$ هل النقطة  $M_{n+1}(x_{n+1} ; y_{n+1})$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  ؟

$$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 5\left(\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1\right) - \left(\frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5\right) + 3$$

$$= \frac{35}{3}x_n + \frac{5}{3}y_n + 5 - \frac{20}{3}x_n - \frac{8}{3}y_n - 5 + 3$$

$$= \frac{15}{3}x_n - \frac{3}{3}y_n + 3$$

$$= 5x_n - y_n + 3$$

لأن  $M_n(x_n ; y_n)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  فإن  $5x_n - y_n + 3 = 0$ منه : الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$ خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن النقطة  $M_n(x_n ; y_n)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ 2 -  $M_{n+1}(x_{n+1} ; y_{n+1})$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  إذن :  $5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 0$ منه :  $y_{n+1} = 5x_{n+1} + 3$ 

$$y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \quad \text{لكن :}$$

$$5x_{n+1} + 3 = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \quad \text{منه :}$$

$$\text{أي } 5x_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 2 \quad (1)$$

من جهة أخرى لدينا  $5x_n - y_n + 3 = 0$   
 إذن :  $y_n = 5x_n + 3$

منه المساواة (1) تصبح :  $5x_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}(5x_n + 3) + 2$

أي :  $5x_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{40}{3}x_n + 8 + 2$

أي :  $5x_{n+1} = \frac{60}{3}x_n + 10$

أي :  $5x_{n+1} = 20x_n + 10$   
 منه :  $x_{n+1} = 4x_n + 2$

3 - لتكن الخاصية من أجل كل عدد طبيعي  $n : x_n \in \mathbb{N}$  (بالتراجع)

من أجل  $n=0$  الخاصية محققة لأن  $1 \in \mathbb{N}$  و  $x_0 = 1$

من أجل  $n=1$  الخاصية محققة لأن  $6 \in \mathbb{N}$  و  $x_1 = 6$

نفرض أن  $x_n \in \mathbb{N}$  من أجل  $n > 1$

هل  $x_{n+1} \in \mathbb{N}$  ؟

لدينا :  $x_n \in \mathbb{N}$  إذن :  $4x_n \in \mathbb{N}$

منه :  $4x_n + 2 \in \mathbb{N}$

أي  $x_{n+1} \in \mathbb{N}$

منه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $x_n \in \mathbb{N}$

4 - لدينا :  $5x_n - y_n + 3 = 0$  إذن :  $y_n = 5x_n + 3$

منه :  $y_n \in \mathbb{N}$  لأن  $x_n \in \mathbb{N}$

5 - ليكن  $\text{PGCD}(x_n; y_n) = d$

إذن :  $d \mid 5x_n - y_n$  :  $d \mid 5x_n$   
 $d \mid y_n$

لكن  $5x_n - y_n + 3 = 0$

أي  $5x_n - y_n = -3$

منه :  $d \mid -3$

أي  $d \mid 3$

إذن : القيم الممكنة لـ  $d$  هي  $\{1; 3\}$

6 - لتكن الخاصية : من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}$  (بالتراجع)  
 من أجل  $n=0$  :  $x_0 = 1$

منه الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$  :  $\frac{5}{3}(4)^0 - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

من أجل  $n=1$  :  $x_1 = 6$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n=1$  :  $\frac{5}{3}(4)^1 - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} - \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$

نفرض أن :  $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}$  من أجل  $n > 1$

هل  $x_{n+1} = \frac{5}{3} \times (4)^{n+1} - \frac{2}{3}$  ؟

لدينا حسب السؤال (2) :  $x_{n+1} = 4x_n + 2$

منه :  $x_{n+1} = 4\left[\frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}\right] + 2$

$$x_{n+1} = \frac{5}{3} \times (4)^{n+1} - \frac{8}{3} + 2 \quad \text{أي :}$$

$$x_{n+1} = \frac{5}{3} \times (4)^{n+1} - \frac{2}{3} \quad \text{أي :}$$

منه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

$$x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3} \quad \text{نتيجة : من أجل كل } n \text{ من } N :$$

$$x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} [5 \times 4^n - 2] \quad \text{فإن } n \text{ غير معدوم}$$

بما أن  $x_n \in N$  فإن العدد  $5 \times 4^n - 2$  مضاعف 3

من جهة أخرى  $5 \times 4^n - 2 = 5 \times 2^{2n} - 2 = 2(5 \times 2^{2n-1} - 1)$  إذن :  $5 \times 4^n - 2$  مضاعف 2 ( $n \neq 0$ )

خلاصة :  $\left. \begin{array}{l} 5 \times 4^n - 2 \text{ مضاعف } 3 \\ 5 \times 4^n - 2 \text{ مضاعف } 2 \end{array} \right\}$

إذن :  $5 \times 4^n - 2$  مضاعف 6 من أجل  $n \neq 0$

حذار ! من أجل  $n=0$  فإن  $5 \times 4^0 - 2 = 3$  إذن :  $5 \times 4^n - 2$  ليس مضاعف 6

#### التمرين - 16

1 -  $x$  عدد طبيعي . برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $k$  :

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = x^k - 1$$

2 -  $d$  و  $n$  عدنان طبيعيان غير معدومان حيث  $d$  يقسم  $n$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $a$  أكبر تماما من 1 العدد  $a^d - 1$  يقسم العدد  $a^n - 1$

3 - استنتج أن العدد  $2^{2010} - 1$  يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9

4 - عين  $\text{PGCD}(63; 60)$

5 - برهن أن :  $(a^{63} - 1) - (a^{60} - 1) a^3 = a^3 - 1$

6 - برهن أن :  $\text{PGCD}(a^{63} - 1; a^{60} - 1) = a^3 - 1$

7 - استنتج قيمة  $\text{PGCD}(2^{63} - 1; 2^{60} - 1)$

#### الحل - 16

1 - من أجل  $x=0$  فإن :  $(0-1)(1) = 0-1 = -1$  إذن الخاصية محققة.

من أجل  $x=1$  فإن :  $(x-1)(1) = 1-1 = 0$  إذن الخاصية محققة.

من أجل  $x > 1$  فإن :  $(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = (x-1) \frac{x^k-1}{x-1}$

$= x^k - 1$  لأن  $1+x+x^2+\dots+x^{k-1}$  هو مجموع  $k$  حد من حدود

متتالية هندسية أساسها  $x$  وحدها الأول 1

2 -  $d$  يقسم  $n$  إذن : يوجد  $k$  من  $N^*$  حيث  $n = dk$

حسب السؤال الأول فإن : من أجل  $x = a^d$  نحصل على :

$$(a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + \dots + a^{dk-d}) = a^{dk} - 1$$

$$(a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + \dots + a^{dk-d}) = a^n - 1 \quad \text{أي :}$$

منه :  $a^d - 1$  يقسم  $a^n - 1$  لأن  $a^n - 1 \in N$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $k$  فإن :  $(x-1)(1+x+\dots+x^{k-1}) = x^k - 1$

3 - لدينا :  $2^3 - 1 = 7$

نضع  $d=3$  و  $n=2010$  و  $a=2$

إذن :  $d$  يقسم  $n$  لأن 3 يقسم 2010

منه :  $a^d - 1$  يقسم  $a^n - 1$

أي  $a^3 - 1$  يقسم  $a^{2010} - 1$

أي  $2^3 - 1$  يقسم  $2^{2010} - 1$

أي 7 يقسم  $2^{2010} - 1$  وهو المطلوب

من جهة أخرى لدينا :  $2^6 - 1 = 63$

نضع  $d=6$  و  $n=2010$  و  $a=2$

إذن :  $d$  يقسم  $n$  لأن 6 يقسم 2010

منه  $a^n - 1$  يقسم  $a^d - 1$  أي  
 $2^{2010} - 1$  يقسم  $2^6 - 1$  أي  
 $63$  يقسم  $2^{2010} - 1$  وهو المطلوب  
 نتيجة :  $63$  يقسم  $2^{2010} - 1$  و  $63 = 7 \times 9$   
 إذن :  $9$  يقسم  $2^{2010} - 1$

4 - حسب خوارزمية إقليدس :  
 إذن :  $\text{PGCD}(63; 60) = 3$

$$\begin{array}{r} 63 \overline{) 60} \quad 60 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 1} \quad 0 \overline{) 20} \end{array}$$

$$(a^{63} - 1) - (a^{60} - 1)a^3 = a^{63} - 1 - a^{63} + a^3 = a^3 - 1 \quad -5$$

و هو المطلوب .

$$\text{PGCD}(a^{63} - 1; a^{60} - 1) = \Delta \quad -6$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \mid a^{63} - 1 \\ \Delta \mid a^3(a^{60} - 1) \end{array} \right\} \text{منه} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta \mid a^{63} - 1 \\ \Delta \mid a^{60} - 1 \end{array} \right\} \text{إذن :}$$

أي  $\Delta \mid a^3 - 1 \quad (1) \dots \dots \dots$

$$\left. \begin{array}{l} a^3 - 1 \mid a^{60} - 1 \text{ لأن } 3 \text{ يقسم } 60 \\ a^3 - 1 \mid a^{63} - 1 \text{ لأن } 3 \text{ يقسم } 63 \end{array} \right\} \text{من جهة أخرى : لدينا حسب السؤال (2) :}$$

$$\text{إذن : } a^3 - 1 \mid \Delta \quad (2) \dots \dots \dots$$

$$\text{نتيجة : } \Delta \mid a^3 - 1 \text{ و } a^3 - 1 \mid \Delta \text{ إذن : } \Delta = a^3 - 1$$

$$\text{إذن : } \Delta = \text{PGCD}(a^{63} - 1; a^{60} - 1)$$

$$\text{أي : } \text{PGCD}(a^{63} - 1; a^{60} - 1) = a^3 - 1$$

$$7 - \text{بوضع } a = 2 \text{ فإن : } \text{PGCD}(2^{63} - 1; 2^{60} - 1) = 2^3 - 1 = 7$$

## المستقيمات و المستويات في الفضاء

المستقيمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (D). مستقيم من الفضاء يشمل النقطة  $A(x_A; y_A; z_A)$

و  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  شعاع توجيه له

$\vec{AM} = t\vec{u}$  : حيث  $t$  عدد حقيقي إذا وجد عدد حقيقي  $t$  حيث  $\vec{AM} = t\vec{u}$

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad \text{منه} \quad \text{هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)}$$

تقاطع المستقيمات و المستويات :

(P) و (P') مستويان حيث  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان ناظميان لهما على الترتيب

(D) و (D') مستقيمان شعاعا توجيههما على الترتيب  $\vec{n}$  و  $\vec{m}$

الأوضاع النسبية الممكنة للمستقيمين (D) و (D') هي :

الحالة الأولى : (D) و (D') من مستويين مختلفين

إذن : (D) و (D') لا يتقاطعان .

الحالة الثانية : (D) و (D') من نفس المستوي إذن :

إما (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة

أو (D) و (D') متوازيان تماما . (لا يتقاطعان)

أو (D) و (D') متطابقان إذن تقاطعهما هو المستقيم (D) نفسه .

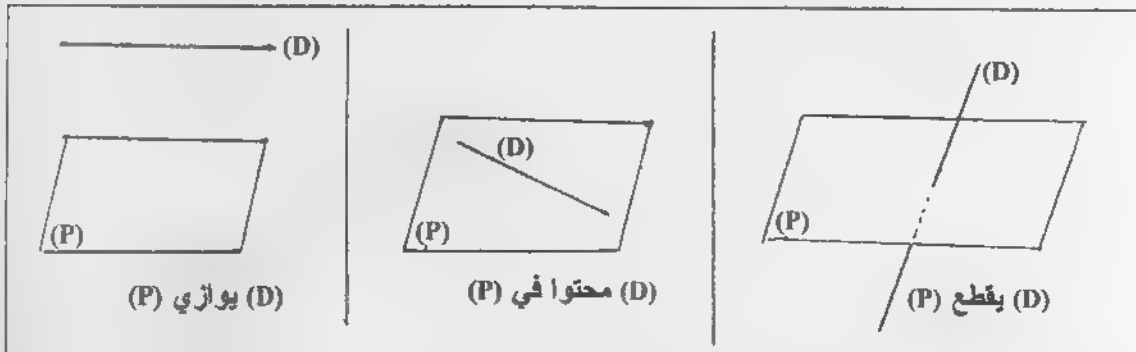
الأوضاع النسبية الممكنة لمستقيم (D) و مستوي (P) هي كما يلي :

الحالة الأولى : (D) محتوفا في المستوي (P)

الحالة الثانية : (D) يقطع (P) في نقطة وحيدة

الحالة الثالثة : (D) يوازي (P) إذن لا يقطعه .

الإنشاء :



نشاط :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1 - أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث  $A(2; 2; -3)$  ؛  $B(1; -1; 0)$

2 - هل النقطة  $C(1; 3; 2)$  تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

الحل :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ إذن : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = 1 \quad (AB) \text{ هو شعاع توجيه المستقيم}$$

$$\text{منه : } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 3t \end{cases} \text{ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) حيث } t \in \mathbb{R}$$

2- من أجل  $(x; y; z) = (1; 3; 2)$  نحصل على :

$$\text{تنافض إذن } C(1; 3; 2) \text{ لا تنتمي إلى المستقيم (AB) أي } \begin{cases} t = 1 \\ t = -1/3 \\ t = 5/3 \end{cases} \begin{cases} 1 = 2 - t \\ 3 = 2 - 3t \\ 2 = -3 + 3t \end{cases}$$

تطبيق :

$(d_1)$  ،  $(d_2)$  ،  $(d_3)$  مستقيمات من الفضاء ممثلة وسيطيا بالجمال التالية على الترتيب :

$$\text{حيث } t \in \mathbb{R} \text{ (تمثيل } (d_1)) \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

$$\text{حيث } \alpha \in \mathbb{R} \text{ (تمثيل } (d_2)) \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 4 + 3\alpha \\ z = 5 - \alpha \end{cases}$$

$$\text{حيث } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (تمثيل } (d_3)) \begin{cases} x = -7 + 7\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

المطلوب : أدرس الوضعية النسبية لـ  $(d_1)$  و  $(d_2)$  ثم  $(d_1)$  و  $(d_3)$  الحل :

لدينا أشعة توجيه المستقيمات  $(d_1)$  ،  $(d_2)$  و  $(d_3)$  هي على الترتيب

$$\vec{w} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

الوضعية النسبية لـ  $(d_1)$  و  $(d_2)$

لدينا :  $\frac{-1}{5} \neq \frac{3}{-1}$  إذن :  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمين خطيا .

منه :  $\left. \begin{array}{l} \text{إما } (d_1) \text{ و } (d_2) \text{ يتقاطعان في نقطة وحيدة} \\ \text{أو } (d_1) \text{ و } (d_2) \text{ ينتميان إلى مستويين مختلفين} \end{array} \right\}$

$$\text{نحل الجملة : } \begin{cases} -2 + 5t = 1 - \alpha \dots\dots\dots (1) \\ -1 - t = 4 + 3\alpha \dots\dots\dots (2) \\ 3 + 4t = 5 - \alpha \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$$(1) \text{ تكافئ } \alpha = 1 + 2 - 5t$$

$$\alpha = 3 - 5t \text{ تكافئ}$$

$$\text{بالتعويض في (2) نحصل على : } -1 - t = 4 + 3(3 - 5t)$$

$$\text{أي : } -1 - t = 13 - 15t$$

$$\text{أي : } t = 1 \text{ منه : } \alpha = 3 - 5 = -2$$

هل المعادلة (3) محققة ؟ بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على :

$$7 - 7 = 5 - (-2) \text{ أي } 0 = 3 \text{ (3) محققة .}$$

نتيجة :  $(d_1)$  و  $(d_2)$  يتقاطعان في نقطة وحيدة  $A(x; y; z)$  حيث

$$\text{أي } (d_1) \cap (d_2) = \{A(3; -2; 7)\} \begin{cases} x = 1 - (-2) = 3 \\ y = 4 + 3(-2) = -2 \\ z = 5 - (-2) = 7 \end{cases}$$

الوضعية النسبية لـ  $(d_1)$  و  $(d_3)$  :

لدينا :  $\frac{5}{7} \neq \frac{-1}{-3}$  إذن :  $\vec{u}$  و  $\vec{w}$  مستقيمين خطياً .

منه :  $\left. \begin{array}{l} \text{إما } (d_1) \text{ و } (d_3) \text{ يتقاطعان في نقطة وحيدة} \\ \text{أو } (d_1) \text{ و } (d_3) \text{ ينتميان إلى مستويين مختلفين} \end{array} \right\}$

$$\begin{cases} -2 + 5t = -7 + 7\lambda & (1) \\ -1 - t = -3\lambda & (2) \\ 3 + 4t = 2\lambda & (3) \end{cases}$$

(2) تكافئ  $t = -1 + 3\lambda$

بالتعويض في (1) نجد :  $-2 + 5(-1 + 3\lambda) = -7 + 7\lambda$

$$-7 + 15\lambda = -7 + 7\lambda$$

أي

$$t = -1 + 3(0) = -1 \quad \lambda = 0 \quad \text{منه :}$$

هل المعادلة (3) محققة ؟ بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على :

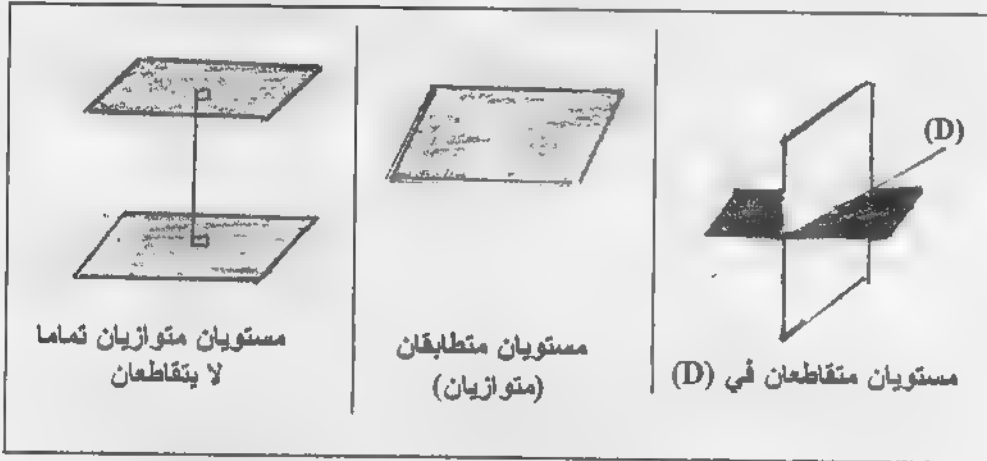
$$-1 = 0 \quad \text{أي} \quad 3 + 4(-1) = 2(0)$$

منه المعادلة (3) ليست محققة .

نتيجة : الجملة (I) لا تقبل حلولاً

منه :  $(d_1)$  و  $(d_3)$  ينتميان إلى مستويين مختلفين فهما إذن : لا يتقاطعان .

الأوضاع النسبية لمستويين



خلاصة : المستقيم في الفضاء معرف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين .

الأوضاع النسبية لثلاث مستويات من الفضاء

الحالة (1) كل المستويات متوازية متتى متتى .

إذن : التقاطع مجموعة خالية

الحالة (2) مستويان متوازيان و قاطع لهما

إذن : التقاطع مجموعة خالية

الحالة (3) مستويين متقاطعين و قاطع لهما .

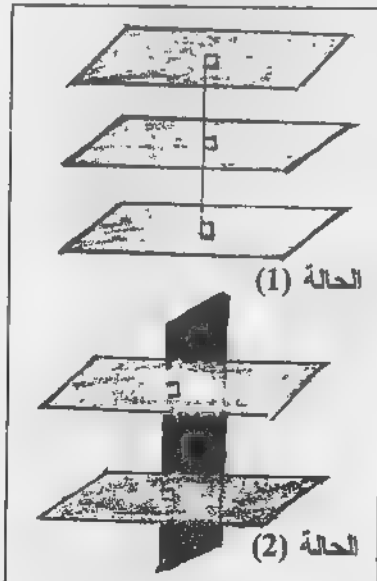
المستويات الثلاثة تتقاطع في النقطة A من المستقيم (D)

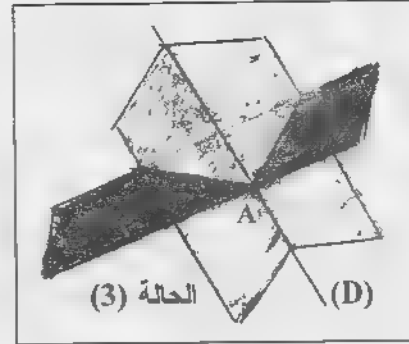
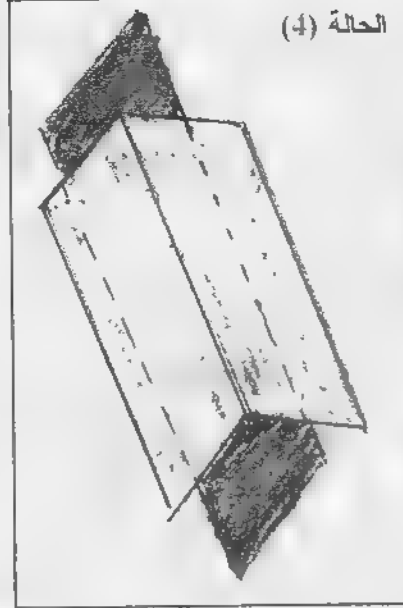
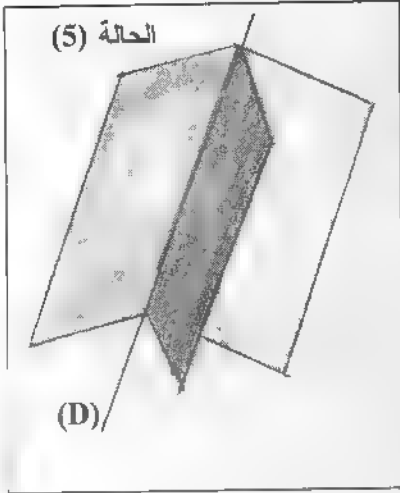
الحالة (4) مستويان متقاطعان و مستوي يوازي قاطعهما .

التقاطع مجموعة خالية .

الحالة (5) المستويات تتقاطع في مستقيم .

المستويات تتقاطع في المستقيم (D)





تطبيق : في الفضاء المنسوب إلى معلم نعتبر المستويات  $(P_1)$  ،  $(P_2)$  ،  $(P_3)$  التي معادلاتها الديكارتية على الترتيب :  
 $4x - 2y - 4z - 5 = 0$  ،  $-x + 4y + z - 3 = 0$  ،  $2x - y - 2z - 1 = 0$   
 1 - أدرس الوضعية النسبية لـ  $(P_1)$  و  $(P_2)$  ثم  $(P_1)$  و  $(P_3)$   
 الحل :

من المعادلات الديكارتية الثلاث نستنتج الأشعة النازمية للمستويات  $(P_1)$  ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  على الترتيب

$$\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} , \quad \vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

منه النتائج التالية :

وضعية  $(P_1)$  بالنسبة إلى  $(P_2)$

$$\frac{-1}{2} \neq \frac{4}{-1} \quad \text{منه } \vec{u}_2 \text{ و } \vec{u}_1 \text{ ليسا مرتبطين خطيا .}$$

إذن :  $(P_1)$  و  $(P_2)$  ليسا متوازيان

أي :  $(P_1)$  و  $(P_2)$  يتقاطعان في مستقيم (D) ذو التمثيل الوسيط التالي :

$$\begin{cases} 2x - y - 2z - 1 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ -2x + 8y + 2z - 6 = 0 \dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} 2x - y - 2z - 1 = 0 \\ -x + 4y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نحصل على  $7y - 7 = 0$  أي  $y = 1$

بالتعويض في (1) نحصل على :  $2x - 1 - 2z - 1 = 0$  أي :  $x - z - 1 = 0$

$$x = z + 1 \quad \text{أي}$$

نتيجة :  $(P_1)$  و  $(P_2)$  يتقاطعان في المستقيم (D) الذي تمثله الوسيط :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

وضعية  $(P_1)$  بالنسبة إلى  $(P_3)$

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} \quad \text{إذن : المستويان } (P_1) \text{ و } (P_3) \text{ متوازيان}$$

إذن : إما  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متطابقان أو منفصلان

بما أن المعادلتين  $2x - y - 2z - 1 = 0$  و  $4x - 2y - 4z - 5 = 0$  ليست متكافئتان

$$\left( \frac{-1}{-5} \neq \frac{1}{2} \right) \quad \text{فإن المستويان منفصلان}$$



نتيجة :  $(P_1)$  و  $(P_3)$  متوازيان تماما لا يتقاطعان

نشاط :

في الفضاء المنسوب إلى معلم نعتبر المستويات  $(P_1)$  ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  التي معادلاتها الديكارتية على الترتيب :

$$4x + y + z + 10 = 0 \quad ; \quad 2x + y + 3 = 0 \quad \text{و} \quad 2x - y + 2z - 1 = 0$$

أدرس تقاطع المستويات  $(P_1)$  ،  $(P_2)$  ،  $(P_3)$

الحل :

إذا وجدت نقطة  $A(x; y; z)$  من الفضاء مشتركة بين المستويات  $(P_1)$  ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  فإن احداثياتها تحقق الجملة

$$(I) \begin{cases} 4x + y + z + 10 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 2x + y + 3 = 0 \dots\dots\dots (2) \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نحصل على :

$$6x + 3z + 9 = 0$$

$$2x + z + 3 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$(4) \dots\dots\dots z = -2x - 3 \quad \text{أي :}$$

نعوض (4) في (1) نحصل على :

$$4x + y - 2x - 3 + 10 = 0 \quad \text{أي :} \quad 2x + y + 7 = 0 \dots\dots\dots (5)$$

من جهة أخرى لدينا المعادلة (2) :

$$\begin{cases} 2x + y = -7 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \quad \text{نتيجة :} \quad \begin{cases} 2x + y + 7 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

إذن : الجملة لا تقبل حلول .

خلاصة : الجملة (I) لا تقبل حلولاً منه المستويات  $(P_1)$  ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  لا تشترك في أية نقطة .

$$(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \emptyset \quad \text{أي}$$

ملاحظة : لحل جملة 3 معادلات من الدرجة (1) ذات المجاهيل الحقيقية  $x$  ،  $y$  ،  $z$  يمكن استعمال

طريقة GAUSS كما يلي :

(1) نحول الجملة إلى جملة مثلثة باستعمال الخواص (جمع معادلتين طرف لـ طرف) .

(2) نصعد في الحلول ابتداء من المعادلة الأخيرة .

مثال :

$a$  ،  $b$  ،  $c$  أعداد حقيقية ثابتة .

$$\text{حل في } R^3 \text{ الجملة } \begin{cases} 2x + 3y - 2z = a \dots\dots\dots (1) \\ x - 2y + 3z = b \dots\dots\dots (2) \\ 4x - y + 4z = c \dots\dots\dots (3) \end{cases} \quad \text{ذات المجاهيل } x , y , z$$

الحل :

$$(4) \dots\dots\dots 4x + 6y - 4z = 2a \quad \text{نضرب طرفي المعادلة (1) في 2}$$

$$(5) \dots\dots\dots 3x - 6y + 9z = 3b \quad \text{نضرب طرفي المعادلة (2) في 3}$$

$$(6) \dots\dots\dots 7x + 5z = 2a + 3b \quad \text{نجمع (4) و (5) نحصل على :}$$

$$(7) \dots\dots\dots -8x + 2y - 8z = -2c \quad \text{نضرب طرفي المعادلة (3) في -2}$$

$$(8) \dots\dots\dots -7x - 5z = b - 2c \quad \text{نجمع (7) و (6) نحصل على :}$$

$$\text{من (6) و (8) لدينا } \begin{cases} 7x + 5z = 2a + 3b \\ -7x - 5z = b - 2c \end{cases} \quad \text{إذن : } 2a + 3b = 2c - b$$

نتيجة : إذا كانت الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  ،  $c$  تحقق العلاقة :

$$2a + 3b = 2c - b \quad \text{فإن الجملة } \begin{cases} 7x + 5z = 2a + 3b \\ -7x - 5z = b - 2c \end{cases} \quad \text{تقبل مالا نهائية من الحلول هي}$$

$$\left\{ z \in \mathbb{R} ; x = \frac{2a + 3b - 5z}{7} \right\}$$

منه : حسب المعادلة (3) فإن :

$$y = \frac{4}{7}(2a + 3b - 5z) + 4z - c \quad \text{أي :}$$

$$y = \frac{8}{7}a + \frac{12}{7}b - c + \frac{8}{7}z \quad \text{أي :}$$

إذا كانت الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  لا تحقق المساواة :  
 $2a + 3b = 2c - b$  فإن الجملة (I) لا تقبل حلولاً .

خلاصة :

إذا كان  $2a + 3b \neq 2c - b$  فإن الجملة (I) لا تقبل حلولاً

إذا كان  $2a + 3b = 2c - b$  فإن الجملة (I) تقبل مجموعة غير منتهية من الحلول  $(x; y; z)$  حيث :

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x = \frac{2}{7}a + \frac{3}{7}b - \frac{5}{7}t \\ y = \frac{8}{7}a + \frac{12}{7}b - c + \frac{8}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

تحقيق : إذا كان  $2a + 3b = 2c - b$  فإن :

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= \frac{4}{7}a + \frac{6}{7}b - \frac{10}{7}t + \frac{24}{7}a + \frac{36}{7}b - 3c + \frac{24}{7}t - 2t \\ &= \frac{28}{7}a + \frac{42}{7}b + \frac{14}{7}t - 3c - 2t \\ &= 4a + 6b + 2t - 3c - 2t \\ &= 4a + 6b - 3c \\ &= 2(2a + 3b) - 3c \\ 2a + 3b = 2c - b \text{ لأن } &= 2(2c - b) - 3c \\ &= c - 2b \end{aligned}$$

$$2a + 3b = 2c - b \quad \text{لكن}$$

$$2a = 2c - 4b \quad \text{منه :}$$

$$a = c - 2b \quad \text{أي :}$$

نتيجة (1)  $2x + 3y - 2z = a$  أي المعادلة (1) محققة .

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= \frac{2}{7}a + \frac{3}{7}b - \frac{5}{7}t - \frac{16}{7}a - \frac{24}{7}b + 2c - \frac{16}{7}t + 3t \\ &= -\frac{14}{7}a - \frac{21}{7}b - \frac{21}{7}t + 3t + 2c \\ &= -2a - 3b - 3t + 3t + 2c \\ &= -(2a + 3b) + 2c \\ 2a + 3b = 2c - b \text{ لأن } &= -(2c - b) + 2c \\ &= b \end{aligned}$$

نتيجة (2)  $x - 2y + 3z = b$  إذن : المعادلة (2) محققة .

$$\begin{aligned} 4x - y + 4z &= \frac{8}{7}a + \frac{12}{7}b - \frac{20}{7}t - \frac{8}{7}a - \frac{12}{7}b + c - \frac{8}{7}t + 4t \\ &= \frac{-28}{7}t + 4t + c \\ &= c \end{aligned}$$

نتيجة (3)  $4x - y + 4z = c$  إذن : المعادلة (3) محققة .

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x = \frac{2}{7}a + \frac{3}{7}b - \frac{5}{7}t \\ y = \frac{8}{7}a + \frac{12}{7}b - c + \frac{8}{7}t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \text{ محققة من أجل } \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \text{ خلاصة : الجملة}$$

## تمارين الكتاب المدرسي

في كل التمارين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

### التمرين 1

1 - أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الي يشمل  $A(0; 0; 1)$  و  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه له .

2 - أعط تمثيل وسيطي للمستقيم (D') الذي يشمل  $B(-1; 0; 1)$  و  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه له .

### الحل 1

لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء إذن  $\vec{AM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{BM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$   
 1 -  $M \in (D)$  يكافئ  $\vec{AM} // \vec{u}$

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z-1=t \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t+1 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

$$M \in (D') \text{ يكافئ } \vec{BM} // \vec{v}$$

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x+1=-t \\ y=0 \\ z-1=2t \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x=-t-1 \\ y=0 \\ z=2t+1 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D')

### التمرين 2

A , B , C : D نقط احداثياتها على الترتيب  $(-2; 7; 1)$  ,  $(3; 5; 2)$  ,  $(13; 1; 4)$  ,  $(-12; 11; 1)$

1 - أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

2 - هل النقط C و D تنتمي إلى المستقيم (AB)

### الحل 2

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ منه } \vec{AB} \begin{pmatrix} 3+2 \\ 5-7 \\ 2-1 \end{pmatrix} - 1$$

$$\vec{AM} // \vec{AB} \text{ يكافئ } M \in (AB)$$

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x+2=5t \\ y-7=-2t \\ z-1=t \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x=5t-2 \\ y=-2t+7 \\ z=t+1 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

2- هل  $C(13; 1; 4)$  تنتمي إلى  $(AB)$  ؟

$$\begin{cases} 13 = 5t - 2 \\ 1 = -2t + 7 \\ 4 = t + 1 \end{cases} \quad \text{فإن} \quad \begin{cases} x = 13 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{من أجل}$$

$$\begin{cases} 5t = 15 \\ 2t = 6 \\ t = 3 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = 3 \\ t = 3 \end{cases} \quad \text{أي}$$

أي  $t = 3$  إذن  $C \in (AB)$

هل  $D(-12; 11; 1)$  تنتمي إلى  $(AB)$  ؟

$$\begin{cases} -12 = 5t - 2 \\ 11 = -2t + 7 \\ 1 = t + 1 \end{cases} \quad \text{فإن} \quad \begin{cases} x = -12 \\ y = 11 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{من أجل}$$

$$\begin{cases} 5t = -10 \\ 2t = -4 \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \text{تناقض إذن : } D \notin (AB)$$

التمرين 3

ليكن  $(D)$  المستقيم الذي تمثله الوسيط  $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$  مع  $t \in \mathbb{R}$

أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(T)$  الذي يشمل النقطة  $A(-1; 2; -4)$  و يوازي المستقيم  $(D)$

الحل 3

$$\begin{cases} x + 2 = 3t \\ y = -t \\ z + 3 = -2t \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \quad \text{منه} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{هو شعاع توجيه المستقيم (D)}$$

نتيجة : المستقيم  $(T)$  يشمل  $A(-1; 2; -4)$  و  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه له

$$\text{منه تمثله الوسيط : } \begin{cases} x + 1 = 3t \\ y - 2 = -t \\ z + 4 = -2t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -2t - 4 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \text{مع } t \in \mathbb{R}$$

التمرين 4

ما هي طبيعة المجموعة التي تمثيلها الوسيط  $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$  مع  $t \in \mathbb{R}$

الحل 4

$$\begin{cases} t = \frac{1}{3}x \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t - \frac{1}{3}x \\ y = 2 + \frac{1}{3}x \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} 3y = 6 + x \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

إذن : هذه المجموعة هي المستقيم الذي معادلته الديكارتية  $x - 3y + 6 = 0$  و الذي ينتمي إلى المستوي ذو المعادلة  $z = 0$

**التمرين 5**  
هل جملة المعادلتين  $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$  و التمثيل الوسيط  $\begin{cases} x = -1 - 9t \\ y = -2 - 4t \\ z = t \end{cases}$  حيث  $(t \in \mathbb{R})$  يعرفان نفس المستقيم ؟

**الحل 5**  
لدينا الجملة  $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \quad (1) \\ 2x - 3y + 2z = 4 \quad (2) \end{cases}$   
نضرب طرفي المعادلة (1) في -2 :  $-2x + 4y + 2z = -6 \quad (3)$   
نجمع المعادلتين (2) و (3) :  $y + 4z = -2$  أي :  $y = -2 - 4z \quad (4)$   
نعوض (4) في (1) :  $x - 2(-2 - 4z) - z = 3$   
 $x + 4 + 8z - z = 3$  أي :  $x + 4 + 7z = 3$   
 $x = -1 - 7z \quad (5)$

نتيجة : الجملة  $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$  تكافئ  $\begin{cases} x = -1 - 7z \\ y = -2 - 4z \\ z = z \end{cases}$   
مع  $t \in \mathbb{R}$  تكافئ  $\begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = -2 - 4t \\ z = t \end{cases}$

نتيجة : الجملة و التمثيل الوسيط لا يعرفان نفس المستقيم .

**التمرين 6**  
نفس السؤال التمرين 5 بالنسبة للجملة  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$  و التمثيل  $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$  مع  $t \in \mathbb{R}$

**الحل 6**  
الجملة  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$  تكافئ  $\begin{cases} 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$   
تكافئ  $\begin{cases} y + 5z - 9 = 0 \\ 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$   
تكافئ  $\begin{cases} y = 9 - 5z \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$   
تكافئ  $\begin{cases} y = 9 - 5z \\ x = -y - z + 2 \end{cases}$   
تكافئ  $\begin{cases} y = 9 - 5z \\ x = -9 + 5z - z + 2 \end{cases}$   
تكافئ  $\begin{cases} x = -7 + 4z \\ y = 9 - 5z \end{cases}$   
تكافئ  $\begin{cases} x = -3 - 4 + 4z \\ y = 4 + 5 - 5z \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -3 + 4(z-1) \\ y = 4 - 5(z-1) \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ t = z - 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

نتيجة : الجملة و التمثيل الوسيطى يعرفان نفس المستقيم .

### التمرين 7

ليكن (P) المستوي ذو المعادلة الديكارتية  $x - y + 2z = 2$  و  $A(4; -2; 1)$  نقطة من الفضاء .

1 - عين  $\vec{u}$  شعاع ناظمي لـ (P)

2 - أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A و  $\vec{u}$  شعاع توجيه له .

3 - استنتج احداثيات النقطة H حيث H هي المسقط العمودي لـ A على (P)

### الحل 7

1 -  $x - y + 2z = 2$  هي معادلة (P) إذن :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  هو شعاع ناظمي لـ (P)

2 - (D) يشمل  $A(4; -2; 1)$  و  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه له إذن : (D) له التمثيل الوسيطى التالي :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{مع} \quad \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{اي} \quad \begin{cases} x - 4 = t \\ y + 2 = -t \\ z - 1 = 2t \end{cases}$$

3 - الشعاع الناظمي للمستوي (P) هو نفسه شعاع توجيه المستقيم (D) إذن : المستقيم (D) عمودي على المستوي (P)

بما أن A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن مسقطها العمودي على المستوي (P) هي نقطة تقاطع (D) و (P) إذن :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{مع} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + t - (-2 - t) + 2(1 + 2t) = 2 \\ x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{اي}$$

$$\begin{cases} 8 + 6t = 2 \\ x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{اي}$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ x = 4 - 1 = 3 \\ y = -2 + 1 = -1 \\ z = 1 - 2 = -1 \end{cases} \quad \text{منه}$$

نتيجة : النقطة H لها الاحداثيات  $H(3; -1; -1)$

$$AH = \sqrt{(4-3)^2 + (-2+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad \text{تحقيق :}$$

$$\ell = \frac{|4 + 2 + 2 - 2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \quad \text{مسافة النقطة A عن المستوي (P) هي :}$$

$$\text{إذن : } AH = \ell = \sqrt{6}$$

### التمرين 8

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل  $A(-3; 5; -1)$  و العمودي على

المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية  $x - 2y + 3z = 0$

## الحل - 8

(P) هو شعاع ناظمي للمستوي (P)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(D) عمودي على (P) إذن  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  هو شعاع توجيه للمستقيم (D)

منه التمثيل الوسيط للمستقيم (D) :

$$\begin{cases} x+3=t \\ y-5=-2t \\ z+1=3t \end{cases}$$

أي  $t \in \mathbb{R}$  مع  $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-2t+5 \\ z=3t-1 \end{cases}$

## التمرين - 9

(D) مستقيم تمثله الوسيط  $\begin{cases} x=-4-t \\ y=2-t \\ z=1+2t \end{cases}$

عين تقاطع (D) مع المستويات  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  ،  $(o; \vec{j}; \vec{k})$  ،  $(o; \vec{i}; \vec{k})$

## الحل - 9

إذا وجدت نقطة  $A(x; y; z)$  مشتركة بين (D) والمستوي  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  فإن :

$$\begin{cases} x=-4-t \\ y=2-t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x=-4-t \\ y=2-t \\ z=1+2t \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4-t \\ y=2-t \\ t=-1/2 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x=-4+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2} \\ y=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \\ z=0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : (D) يقطع المستوي  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  في النقطة  $A(-7/2; 5/2; 0)$

لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة مشتركة بين (D) والمستوي  $(o; \vec{j}; \vec{k})$

$$\begin{aligned} M \in (o; \vec{j}; \vec{k}) & \quad \text{إذن} \quad x=0 \\ -4-t=0 & \quad \text{منه} \\ t=-4 & \quad \text{أي} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y=2-t=2+4=6 \\ z=1+2t=1-8=-7 \end{cases} & \quad \text{منه} \end{aligned}$$

نتيجة : (D) يقطع المستوي  $(o; \vec{j}; \vec{k})$  في النقطة  $M(0; 6; -7)$

لتكن  $B(x; y; z)$  نقطة مشتركة بين (D) والمستوي  $(o; \vec{i}; \vec{k})$

$$\begin{aligned} B \in (o; \vec{i}; \vec{k}) & \quad \text{إذن} \quad y=0 \\ 2-t=0 & \quad \text{أي} \\ t=2 & \quad \text{منه} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x=-4-t=-4-2=-6 \\ z=1+2t=1+4=5 \end{cases} & \quad \text{إذن} \end{aligned}$$

نتيجة : (D) يقطع المستوي  $(o; \vec{i}; \vec{k})$  في النقطة  $B(-6; 0; 5)$

## التمرين - 10

ما هي طبيعة مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق :

$$t \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 - 3t^2 \\ z = 2 + 2t^2 \end{cases}$$

## الحل - 10

نضع  $t^2 = \alpha$  حيث  $\alpha \geq 0$

$$\alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ حيث } \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 3\alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases} \text{ : منه مجموعة النقط تحقق الجملة :}$$

$$\text{إذن : المجموعة هي جزء من المستقيم الذي تمثله الوسيطى } t \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

## التمرين - 11

(d) و (d') مستقيمين تمثيلهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$$t' \in \mathbb{R} \text{ و } t \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = 1 - t' \\ z = 2 + t' \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

بين أن (d) و (d') من نفس المستوي ثم عين تقاطعهما .

## الحل - 11

$$(d_1) \text{ هو شعاع توجيه المستقيم } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(d_2) \text{ هو شعاع توجيه المستقيم } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بما أن  $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$  فإن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمان خطيا .

إذن : (d<sub>1</sub>) و (d<sub>2</sub>) ليسا متوازيين .

$$\text{لنحل الجملة } \begin{cases} t = t' + 1 \\ t = 1 - t' \end{cases}$$

بالجمع :  $2t = 2$  منه  $t = 1$

بالتعويض في إحدى المعادلات :  $t' = t - 1$  منه  $t' = 1 - 1 = 0$

نتيجة : من أجل  $t = 1$  فإن  $t' = 0$  فالمستويين إما يتقاطعان في نقطة وحيدة إحداثياتها  $A(x; y; z)$  لو ليسا من نفس المستوي كما يلي :

$$\begin{cases} x = t' + 1 = 1 \\ y = 1 - t' = 1 \\ z = 2 + t' = 2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = t = 1 \\ y = t = 1 \\ z = t + 1 = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

نتيجة : (d<sub>1</sub>) و (d<sub>2</sub>) من نفس المستوي و يتقاطعان في نقطة وحيدة  $A(1; 1; 2)$

## التمرين - 12

$$\text{هل المستقيمان } \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \text{ متوازيان ؟ متقاطعان ؟ ليسا من نفس المستوي}$$

## الحل - 12

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه المستقيم الأول .}$$



$$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه المستقيم الثاني .}$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2} \text{ إذن : المستقيمان ليسا متوازيان .}$$

نتيجة (1) إما المستقيمان متقاطعان في نقطة وحيدة أو لا ينتميان إلى نفس المستوى .

$$\begin{cases} 2t = t' \\ 3+t = 1+2(2t) \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 3+2t = 3+t' \\ 3+t = 1+2t' \end{cases} \text{ لنحل الجملة}$$

$$\begin{cases} 2t = t' \\ 3-1 = 4t-t \end{cases} \text{ تكافئ}$$

$$\begin{cases} t' = 2t \\ t = 2/3 \end{cases} \text{ تكافئ}$$

$$\begin{cases} t' = 4/3 \\ t = 2/3 \end{cases} \text{ تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2\left(\frac{2}{3}\right) = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3} \\ y = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ من أجل } t = 2/3 \text{ نحصل على :}$$

$$\begin{cases} x = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3} \\ y = 1 + 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{11}{3} \\ z = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ من أجل } t' = 4/3 \text{ نحصل على :}$$

نتيجة : المستقيمان لا يتقاطعان في أي نقطة .

إذن : فهما من مستويين مختلفين .

التمرين - 13

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة  $A(0; -1; 2)$

$$\text{و يوازي المستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطى } \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2k \\ z = 5 \end{cases} \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

الحل - 13

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه المستقيم (D) إذن : } \vec{u} \text{ هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (d) .}$$

$$\text{إذن : (d) له التمثيل الوسيطى التالي : } \begin{cases} x - 0 = -2t \\ y + 1 = 2t \\ z - 2 = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = -2t \\ y = 2t - 1 \\ z = 2 \end{cases} \text{ حيث } t \in \mathbb{R}$$

التمرين - 14

ليكن (D) و (D') مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 5 - 6k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases} \text{ حيث } k \in \mathbb{R} \text{ و } t \in \mathbb{R}$$

أثبت أن (D) و (D') متطابقان .

الحل - 14

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه (D) و } \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه (D')}$$

$$\text{لدينا : } \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{-2}{1} = -2$$

إذن :  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متوازيان

أي : المستقيمان (D) و (D') متوازيان .

منه : إذا وجدت نقطة مشتركة بين (D) و (D') فإن (D) و (D') متطابقان

$$\text{نحل الجملة : } \begin{cases} 2k = 1 - t \\ 5 - 6k = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} 2k + t - 1 = 0 \\ 6k + 3t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6k + 3t - 3 = 0 \\ 6k + 3t - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$6k + 3t - 3 = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$3t = 3 - 6k \quad \text{تكافئ}$$

$$t = 1 - 2k \quad \text{تكافئ}$$

منه : المعادلة  $t = 1 - 2k$  محقة .

$$\text{أي الجملتين } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 2k \\ y = 5 - 6k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \quad \text{متكافئتان إذن : المستقيمان (D) و (D') متطابقان .}$$

ملاحظة : يكفي إعطاء قيمة لـ  $t$  ثم استنتاج وجود نقطة مشتركة بين (D) و (D') كما يلي :

$$\text{من أجل } t = 1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{من أجل } k = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

إذن : النقطة  $M(0; 5; 1)$  مشتركة بين (D) و (D') و بما أنهما متوازيان فهما متطابقتان .

### التمرين - 15

(D) و (D') مستقيمان تمثيلهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$$\text{حيث } k \in \mathbb{R} \text{ و } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + 2k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

أثبت أن (D) و (D') من نفس المستوي .

### الحل - 15

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع بوجيه المستقيم (D) و } \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه المستقيم (D')}$$

$$\text{إذن : } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ ليسا مرتبطين خطيا (غير متوازيان)}$$

منه : المستقيمان (D) و (D') ليسا متوازيان .

نتيجة :  $\left. \begin{aligned} &\text{إما (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة} \\ &\text{أو (D) و (D') ليسا من نفس المستوي} \end{aligned} \right\}$

إذن : يكفي أن نثبت أن (D) و (D') يتقاطعان كما يلي :

$$\text{الجملة } \begin{cases} -4 + t = 1 - k \\ 4 + 2t = 2 + 2k \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} t = 5 - k \\ 2t = -2 + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t = 10 - 2k \\ 2t = -2 + 2k \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} 2t = 10 - 2k \\ 4t = 8 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} t = 5 - k \\ t = 2 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} k = 5 - t \\ t = 2 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} k = 3 \\ t = 2 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = -4 + 2 = -2 \\ y = 4 + 4 = 8 \\ z = 2 + 2 = 4 \end{cases} \quad \text{من أجل } t = 2 \text{ نحصل على :}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 2 + 6 = 8 \\ z = 1 + 3 = 4 \end{cases} \quad \text{من أجل } k = 3 \text{ نحصل على :}$$

نتيجة : (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة A(-2 ; 8 ; 4)  
إذن : (D) و (D') ينتميان إلى نفس المستوى .

التمرين 16

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$$\text{حيث } t \in \mathbb{R} \text{ و } m \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 3 + 2m \\ y = m \\ z = -1 - 4m \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

1 - بين أن (D) و (T) ليسا من نفس المستوى

2 - عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم (P) يوازي (T) و يقطع (D)

الحل - 16

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه (D) و } \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه (T)}$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2} \quad \text{إذن : } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ ليسا متوازيان .}$$

منه : (D) و (T) ليسا متوازيان .

أي إما (D) و (T) متقاطعان أو ليسا من نفس المستوى .

$$\begin{cases} 1 + t = 3 + 2(1 - 2t) \\ m = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} 1 + t = 3 + 2m \\ 1 - 2t = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + 4t = 3 + 2 - 1 \\ m = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} t = 4/5 \\ m = 1 - \frac{8}{5} \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} t = 4/5 \\ m = -3/5 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} \\ y = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5} \\ z = 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{5} \end{cases} \quad \text{من أجل } t = 4/5 \text{ نحصل على :}$$

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5} \\ y = \frac{-3}{5} \\ z = -1 + \frac{12}{5} = \frac{7}{5} \end{cases} \quad \text{من أجل } m = -3/5 \text{ نحصل على :}$$

نتيجة : المستقيمان (D) و (T) لا يتقاطعان في أية نقطة . إذن : (D) و (T) ليسا من نفس المستوي .

$$2 - (P) \text{ يوازي (T) إذن الشعاع } \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم (P)}$$

$$\text{منه تمثله الوسيط : } \begin{cases} x = \alpha + 2k \\ y = \beta + k \\ z = \lambda - 4k \end{cases} \text{ حيث } k \in \mathbb{R} \text{ و } \alpha, \beta, \lambda \text{ أعداد حقيقية ثابتة نعينها كما يلي :}$$

(P) يقطع (D) إذن يكفي أن نعين  $\alpha, \beta, \lambda$  حتى يكون المستقيمان (P) و (D) يشتركان في نقطة .

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{من أجل } t = 0 \text{ نحصل على :}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad \text{منه } \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{نضع } k = 0 \text{ إذن :}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - 4k \end{cases} \quad \text{نتيجة : يكفي أخذ المستقيم (P) ذو التمثيل الوسيط التالي :}$$

التمرين 17

(D) و (T) مستقيمان تمثلهما الوسيطين على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 9 + 5k \\ y = -5 - k \\ z = -8 - 4k \end{cases} \quad \text{حيث } k \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in \mathbb{R}$$

بين أن (D) و (T) مستقيمان منطبقان .

الحل 17

$$\text{نضع } t = 2 + k \quad \text{إذن : } k = t - 2$$

$$\begin{cases} x = 9 + 5(t-2) \\ y = -5 - (t-2) \\ z = -8 - 4(t-2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x = 9 + 5k \\ y = -5 - k \\ z = -8 - 4k \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$\begin{cases} x = 9 + 5t - 10 \\ y = -5 - t + 2 \\ z = -8 - 4t + 8 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : التمثيلين الوسيطيين للمستقيمين (D) و (T) متكافئين

إذن : المستقيمان (D) و (T) منطبقان

ملاحظة : فكرة وضع  $t = 2 + k$  جاءت من المساواة  $-8 - 4k = -4t$

$$\text{أي } -4(2 + k) = -4t \quad \text{أي } 2 + k = t$$

إذا لم تلاحظ ذلك يمكن أن نثبت أن (D) و (T) ليسا متوازيان و ليسا متقاطعان (الطريقة الكلاسيكية) .

## التمرين 18 -

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\text{حيث } k \in \mathbb{R} \text{ و } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + 4k \\ z = k \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = t \end{cases}$$

بين أن (D) و (T) متوازيان .

## الحل - 18

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه المستقيم (D)}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه المستقيم (T)}$$

$$\frac{-2}{-2} = \frac{4}{4} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{إذن : } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ متوازيان .}$$

منه المستقيمان (D) و (T) متوازيان .

## التمرين 19 -

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\text{حيث } k \in \mathbb{R} \text{ و } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 5 + 3k \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

بين أن (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوى .

## الحل - 19

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه (D) و } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه (T)}$$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \quad \text{إذن : } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ ليسا متوازيان .}$$

منه : (D) و (T) ليسا متوازيان .

إذن يكفي أن نثبت أن (D) و (T) لا يتقاطعان في أية نقطة .

$$\begin{cases} -3 + 2 - 2k = -1 + k \\ t = 2 - 2k \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} -3 + t = -1 + k \\ t = 2 - 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + 1 = 3k \\ t = 2 - k \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} k = 0 \\ t = 2 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\text{من أجل } k = 0 \text{ نحصل على : } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\text{من أجل } t = 2 \text{ نحصل على : } \begin{cases} x = -3 + 2 = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3(2) = 7 \end{cases}$$

نتيجة : (D) و (T) لا يتقاطعان منه (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوى .

## التمرين 20 -

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\text{حيث } k \in \mathbb{R} \text{ و } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = -1 + 4k \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

بين أن (D) و (T) متقاطعان .

الحل - 20

$$\begin{cases} k - 3 + 2t \\ 2 - t = 1 - (-3 + 2t) \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} -3 + 2t = k \\ 2 - t = 1 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = -3 + 2t \\ 2 - t = 1 + 3 - 2t \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} k = -3 + 2t \\ t = 2 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} k = -3 + 2(2) \\ t = 2 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

من أجل  $k = 1$  نحصل على :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

من أجل  $t = 2$  نحصل على :

$$\begin{cases} x = -3 + 2(2) = 1 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

نتيجة : (D) و (T) يتقاطعان في النقطة  $A(1; 0; 3)$ التمرين - 21

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلاتهما الديكارتيين :

$$(Q) : 3x + 3y + 3z - 12 = 0 \quad \text{و} \quad (P) : x + y + z = 4 \quad -1$$

$$(Q) : 3x + 3y + 3z + 12 = 0 \quad \text{و} \quad (P) : x + y + z = 4 \quad -2$$

$$(Q) : x + y + z = 0 \quad \text{و} \quad (P) : 2x - y + z + 2 = 0 \quad -3$$

$$(Q) : x - y + 2z = 5 \quad \text{و} \quad (P) : -3x + 2y + z - 1 = 0 \quad -4$$

الحل - 21

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 12 \\ 3x + 3y + 3z = 12 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 12 = 0 \end{cases} -1$$

$$3x + 3y + 3z = 12 \quad \text{يكافئ}$$

$$x + y + z - 4 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : المستويان (P) و (Q) متطابقان إذن : تقاطعهما هو المستوي نفسه ذو المعادلة  $x + y + z - 4 = 0$ 

$$\text{مستحيل} \quad \begin{cases} 3x + 3y + 3z = 12 \\ 3x + 3y + 3z - 12 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + 3z + 12 = 0 \end{cases} -2$$

نتيجة : الجملة لا تقبل حلولاً منه المستويان (P) و (Q) لا يتقاطعان .

$$\begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \dots\dots\dots (1) & -3 \\ x + y + z = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نحصل على :

$$3x + 2z + 2 = 0 \quad \text{منه :} \quad x = -\frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3}z - \frac{2}{3} + y + z = 0 \quad \text{بتعويض (3) في (2) نحصل على :}$$

$$y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} = 0 \quad \text{منه :}$$

$$(4) \dots\dots y = -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{3}z + \frac{2}{3} \\ y = \frac{-1}{3}z + \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{نتيجة : الجملة}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = \frac{-2}{3}t - \frac{2}{3} \\ y = \frac{-1}{3}t + \frac{2}{3} \\ z = t \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{3}t - \frac{2}{3} \\ y = \frac{-1}{3}t + \frac{2}{3} \\ z = t \end{cases} \quad \text{منه : المستويان (P) و (Q) يتقاطعان في المستقيم (D) الذي تمثله الوسيطى}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} -3x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \quad -4$$

لنبحث عن  $x$  و  $y$  بدلالة  $z$  (حل الجملة ذات المجهولين  $x$  و  $y$ )

$$\det = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{cases} x = \begin{vmatrix} 2 & z-1 \\ -1 & 2z-5 \end{vmatrix} = 4z - 10 + z - 1 = 5z - 11 \\ y = \begin{vmatrix} z-1 & -3 \\ 2z-5 & 1 \end{vmatrix} = z - 1 + 6z - 15 = 7z - 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5z - 11 \\ y = 7z - 16 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} -3x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \quad \text{نتيجة : الجملة}$$

$$\begin{cases} x = 5t - 11 \\ y = 7t - 16 \\ z = t \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 5t - 11 \\ y = 7t - 16 \\ z = t \end{cases} \quad \text{منه : المستويان (P) و (Q) يتقاطعان في المستوي ذو التمثيل الوسيطى}$$

## التمرين 22

(D) و (T) مستقيمان تمثلهما الوسيطين على الترتيب :

$$k \in \mathbb{R} \text{ و } t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x = 4 - 5k \\ y = 3 - 2k \\ z = -1 + 2k \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

1 - تحقق أن المستقيمان (D) و (T) متقاطعان .

2 - أكتب المعادلة الديكارية للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (T)

## الحل 22

1 - إذا كانت  $A(x; y; z)$  نقطة مشتركة بين (D) و (T) فإن  $x = -1$

$$\text{منه : } 4 - 5k = -1 \quad \text{أي } k = 1$$

$$\text{إذن : } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - 2(1) = 1 \\ z = -1 + 2(1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{من جهة أخرى : من أجل } t = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

نتيجة : (D) و (T) يتقاطعان في النقطة  $A(-1; 1; 1)$

$$2- \text{ من أجل } t=1 \text{ فإن } \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

منه  $B(-1; 0; -1)$  تنتمي إلى (D)

$$\text{من أجل } k=0 \text{ فإن } \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases}$$

منه  $C(4; 3; -1)$  تنتمي إلى (T)

نتيجة : المستوى الذي يشمل المستقيمين (D) و (T) هو المستوي (P) الذي يشمل النقط A ، B ، C

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1+1 \\ 0-1 \\ -1-1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4+1 \\ 3-1 \\ -1-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ليكن } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (P) إذن : } \begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b-2c=0 \\ 5a+2b-2c=0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} a(0)+b(-1)+c(-2)=0 \\ a(5)+b(2)+c(-2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-2c=0 \\ 5a+2b-2c=0 \end{cases} \quad \text{من أجل } b=-2 \text{ نحصل على}$$

$$\begin{cases} c=1 \\ 5a+2b-2c=0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} c=1 ; b=-2 \\ 5a+2(-2)-2(1)=0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} c=1 ; b=-2 \\ a=6/5 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\text{نتيجة : } \vec{u} \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)}$$

$$\text{إذن : } \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ هو أيضا شعاع ناظمي لـ (P)}$$

منه : معادلة (P) نكتب من الشكل :  $6x - 10y + 5z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}$

بما أن  $A \in (P)$  فإن :  $6(-1) - 10(1) + 5(1) + \alpha = 0$

أي :  $\alpha = 11$

نتيجة : معادلة المستوي (P) هي :  $6x - 10y + 5z + 11 = 0$

### التمرين - 23

(D) و (T) مستقيمان تمثلهما الوسيطين على الترتيب :

$$\begin{cases} x=1+4k \\ y=3-2k \\ z=-1+2k \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=-2-4t \\ y=3+2t \\ z=1-2t \end{cases}$$

1- تحقق أن المستقيمان (D) و (T) متوازيان .

2- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (T)



## الحل = 23

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه (D)} \quad -1$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه (T)}$$

$$\frac{-4}{4} = \frac{2}{-2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{إذن : } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ متوازيان .}$$

منه : (D) و (T) متوازيان .

$$-2 \text{ من أجل } t=0 : \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \text{ منه نقطة من (D) } A(-2; 3; 1)$$

$$\text{من أجل } t=1 : \begin{cases} x=-2-4=-6 \\ y=3+2=5 \\ z=1-2=-1 \end{cases} \text{ منه نقطة من (D) } B(-6; 5; -1)$$

$$\text{من أجل } k=0 : \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases} \text{ منه نقطة من (T) } C(1; 3; -1)$$

نتيجة : المستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (T) هو المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C كما يلي :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ أي هو نفسه شعاع توجيه المستقيم (D)} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -6+2 \\ 5-3 \\ -1-1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ منه } \vec{AC} \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3-3 \\ -1-1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (P) ليكن}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases} \text{ إذن : } \begin{cases} -4a + 2b - 2c = 0 \\ 3a - 2c = 0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} -4 + b - c = 0 \\ c = 3 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} -8 + 2b - 2c = 0 \\ 6 - 2c = 0 \end{cases} \text{ من أجل } a=2 \text{ نحصل على :}$$

$$\begin{cases} b = c + 4 \\ c = 3 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} b = 7 \\ c = 3 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) نتيجة :}$$

$$\text{منه (P) له المعادلة : } 2x + 7y + 3z + \alpha = 0 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{بما أن } A \in (P) \text{ فإن : } 2(-2) + 7(3) + 3(1) + \alpha = 0$$

$$\alpha = -20 \text{ أي :}$$

$$\text{خلاصة : (p) له المعادلة } 2x + 7y + 3z - 20 = 0$$

تحقيق :

$$2x + 7y + 3z - 20 = 2(-2 - 4t) + 7(3 + 2t) + 3(1 - 2t) - 20 \quad \text{منه} \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$= -4 - 8t + 21 + 14t + 3 - 6t - 20$$

$$= 0$$

$$2x + 7y + 3z - 20 = 2(1 + 4k) + 7(3 - 2k) + 3(-1 + 2k) - 20 \quad \text{منه} \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 3 - 2k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$$

$$= 2 + 8k + 21 - 14k - 3 + 6k - 20$$

$$= 0$$

## التمرين 24

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستوي (P) و المستقيم (D)

$$(D) : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{و} \quad (P) : -2x + y - z + 3 = 0 \quad -1$$

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad (P) : x + 3y - z + 1 = 0 \quad -2$$

$$(D) : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad \text{و} \quad (P) : x + y - 2z + 2 = 0 \quad -3$$

## الحل 24

في كل مرة نعوض  $x, y, z$  في معادلة المستوي (P) لنحصل على قيمة الوسيط  $t$  ثم نبحث عن احداثيات نقطة التقاطع إذا وجدت . أما إذا كانت المعادلة محققة من أجل كل عدد حقيقي  $t$  فإن المستقيم (D) محتوي في المستوي (P) و عليه فإن  $(D) \cap (P) = (D)$

$$-2(-2 - 4t) + (-1 + 3t) - (2 + t) + 3 = 0 \quad \text{منه} \quad -2x + y - z + 3 = 0 \quad -1$$

$$-2t - 1 + 3t - 2 - t + 3 = 0 \quad \text{أي} \quad \begin{cases} y = -1 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$0 = 0 \quad \text{دائما محققة} \quad \text{أي}$$

نتيجة : (D) ينتمي إلى المستوي (P) منه  $(D) \cap (P) = (D)$ 

$$1 + 3t + 3(-2 - 2t) - 2 + 1 = 0 \quad \text{منه} \quad \begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 \end{cases} \quad -2$$

$$1 + 3t - 6 - 6t - 1 = 0 \quad \text{أي}$$

$$-3t = 6 \quad \text{أي}$$

$$t = -2 \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 3(-2) = -5 \\ y = -2 - 2(-2) = 2 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{بالتعويض في معادلات (D) :}$$

نتيجة :  $(D) \cap (P) = \{A(-5; 2; 2)\}$ 

$$5 + t + 1 + t - 2(4 + t) + 2 = 0 \quad \text{منه} \quad \begin{cases} x + y - 2z + 2 = 0 \\ x = 5 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad -3$$

$$6 + 2t - 8 - 2t + 8 = 0 \quad \text{أي}$$

$$6 = 0 \quad \text{مستحيل} \quad \text{أي}$$

نتيجة :  $(D) \cap (P) = \emptyset$ 

## التمرين 25

لتكن النقط  $w(1; 1; 1)$  و  $A(3; 3; 0)$ 

1 - أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها w و تشمل النقطة A .

2 - أكتب معادلة لـ (P) المستوي المماس لـ (S) في النقطة A

3 - لتكن النقط  $D(1; 2; -3)$  ،  $C(0; 0; -3)$  ،  $B(-1; 2; -1)$

(a) تحقق أن النقط  $B$  ،  $C$  ،  $D$  ليست على استقامة واحدة .

(b) أكتب معادلة ديكرتية للمستوي  $(BCD)$  .

4 - بين أن  $(BCD)$  و  $(P)$  متعامدان .

5 - أكتب تمثيلا وسيطيا لتقاطع  $(P)$  و  $(BCD)$

الحل - 25

1 - نصف قطر الكرة هو :  $WA = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

منه معادلة  $(S)$  :  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$

أي :  $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 9$

أي :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

2 - المستوي  $(P)$  مماس لـ  $(S)$  عند  $A$  إذن :  $\left. \begin{array}{l} A \text{ يشمل } (P) \\ \overrightarrow{WA} \text{ شعاع ناظمي لـ } (P) \end{array} \right\}$

لدينا  $\overrightarrow{WA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

منه :  $(P)$  له المعادلة  $2x + 2y - z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي .

بما أن  $A \in (P)$  فإن :  $2(3) + 2(3) - 0 + \alpha = 0$

أي :  $\alpha = -12$

نتيجة : معادلة  $(P)$  هي :  $2x + 2y - z - 12 = 0$

(a - 3)  $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0-2 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  منه  $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2-2 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  منه  $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

بما أن  $\frac{2}{1} \neq \frac{0}{-2}$  فإن  $\overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{BD}$  ليسا متوازيان  
منه النقط  $B$  ،  $C$  ،  $D$  ليست على استقامة واحدة .

(b) ليكن  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  شعاع ناظمي للمستوي  $(BCD)$

يكافئ  $\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{BC} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b - 2c = 0 \\ 2a - 2c = 0 \end{cases}$

من أجل  $a = 1$  نحصل على :  $\begin{cases} 1 - 2b - 2c = 0 \\ 2 = 2c \end{cases}$  يكافئ  $\begin{cases} 1 - 2c = 2b \\ c = 1 \end{cases}$

يكافئ  $\begin{cases} -1 = 2b \\ c = 1 \end{cases}$

يكافئ  $\begin{cases} b = -1/2 \\ c = 1 \end{cases}$

نتيجة :  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$  منه  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  هو شعاع ناظمي للمستوي  $(BCD)$

إذن : معادلة  $(BCD)$  هي :  $2x - y + 2z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي .

$B \in (BCD)$  إذن :  $2(-1) - 2 + 2(-1) + \alpha = 0$

أي :  $\alpha = 6$

نتيجة : معادلة المستوي  $(BCD)$  هي :  $2x - y + 2z + 6 = 0$

4 -  $\overrightarrow{WA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$

$$\vec{u} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (BCD)} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{WA} \cdot \vec{u} = 2(2) + 2(-1) - 1(2) = 4 - 4 = 0$$

$$\vec{WA} \perp \vec{u} \quad \text{إذن :}$$

منه : المستويان (BCD) و (P) متعامدان .

$$-5 \quad \begin{cases} 2x + 2y - z - 12 = 0 \\ 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{نبحث عن } x \text{ و } y \text{ بدلالة } z \text{ كما يلي :}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z-12 \\ -1 & 2z+6 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{4z+12-z-12}{-6} = \frac{3z}{-6} = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{\begin{vmatrix} -z-12 & 2 \\ 2z+6 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-2z-24-4z-12}{-6} = z+6 \end{cases}$$

نتيجة : تقاطع المستويين (BCD) و (P) هو المستقيم ذو التمثيل الوسيطى :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = t+6 \\ z = t \end{cases}$$

التمرين 26

عين في كل حالة من الحالات التالية تقاطع المستويات (P) ، (Q) ، (R) المعرفة بمعادلاتها الديكارية :

$$-1 \quad (R) : 3x + 2y = 6 \quad ; \quad (Q) : y + \frac{1}{2}z = 3 \quad ; \quad (P) : x + y + z = 4$$

$$-2 \quad (R) : 3x + 4y + 3z = 15 \quad ; \quad (Q) : -x + y - z = 2 \quad ; \quad (P) : x + y + z = 4$$

الحل 26

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \dots\dots (1) \\ -2y - z = -6 \dots\dots (2) \\ 3x + 2y = 6 \dots\dots (3) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + \frac{1}{2}z = 3 \quad -1 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نحصل على  $x - y = -2$  ..... (4)  
نحل جملة المعادلتين (3) و (4) كما يلي :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

بالجمع نحصل على  $5x = 2$  منه  $x = 2/5$

$$\frac{2}{5} - y = -2 \quad : (4) \quad \text{نعوض في المعادلة}$$

$$\text{منه :} \quad y = \frac{2}{5} + 2 \quad \text{أي} \quad y = 12/5$$

$$\frac{2}{5} + \frac{12}{5} + z = 4 \quad : (1) \quad \text{نعوض } x \text{ و } y \text{ في المعادلة}$$

$$\text{منه :} \quad z = 4 - \frac{14}{5} \quad \text{أي} \quad z = 6/5$$

نتيجة : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في نقطة وحيدة  $A(2/5 ; 12/5 ; 6/5)$

$$\begin{cases} x+y+z=4 & \dots\dots\dots (1) \\ -x+y-z=2 & \dots\dots\dots (2) \\ 3x+4y+3z=15 & \dots\dots\dots (3) \end{cases} \quad -2$$

بجمع (1) و (2) نحصل على :  $2y=6$  منه  $y=3$   
نعوض  $y$  في المعادلة (1) نحصل على :  $x+3+z=4$  منه  $z=1-x$   
نعوض  $y$  و  $z$  في المعادلة (3) نحصل على :  $3x+4(3)+3(1-x)=15$   
 $3x+12+3-3x=15$  أي :  $15=15$  وهذا محقق دائما .  
نتيجة :  $\begin{cases} y=3 \\ z=1-x \end{cases}$  يكافئ  $\begin{cases} x=1-z \\ y=3 \end{cases}$

منه : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في المستقيم (D) الذي تمثله الوسيطية :  $\begin{cases} x=1-t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$  حيث  $t \in \mathbb{R}$

التمرين = 27

حل في  $\mathbb{R}^3$  جمل المعادلات التالية :

$$\begin{cases} 4x+2y-z+2=0 & -2 \\ x+y-2z=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y-7z+26=0 & -1 \\ x+y-2z+7=0 \\ -x-2y+z-3=0 \end{cases}$$

الحل = 27

$$\begin{cases} 2x-y-7z+26=0 & \dots\dots\dots (1) \\ x+y-2z+7=0 & \dots\dots\dots (2) \\ -x-2y+z-3=0 & \dots\dots\dots (3) \end{cases} \quad -1$$

نحل جملة المعادلتين (1) و (2) ذات المجهولين  $x$  و  $y$  بدلالة  $z$  :

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1=3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -7z+26 \\ 1 & -2z+7 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2z-7+7z-26}{3} = 3z-11$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -7z+26 & 2 \\ -2z+7 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-7z+26+4z-14}{3} = -z+4$$

نعوض  $x$  و  $y$  في المعادلة (3) نحصل على :  $-(3z-11)-2(-z+4)+z-3=0$   
أي :  $-3z+11+2z-8+z-3=0$   
أي :  $0=0$  دائما محقق .

نتيجة : الجملة تكافئ  $\begin{cases} x=3z-11 \\ y=-z+4 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

إذن : حلولها هي مجموعة غير منتهية .

هندسيا : إذا اعتبرنا المستويات (P) ، (Q) ، (R) التي معادلاتها على الترتيب (1) ، (2) ، (3) فإن تقاطعها هي

المستقيم (D) الذي تمثله الوسيطية  $\begin{cases} x=3t-11 \\ y=-t+4 \\ z=t \end{cases}$  حيث  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 4x+2y-z+2=0 & \dots\dots\dots (1) \\ x+y-2z=0 & \dots\dots\dots (2) \\ -x-2y+z+1=0 & \dots\dots\dots (3) \end{cases} \quad -2$$

نحل جملة المعادلتين (1) و (2) ذات المجهولين  $x$  و  $y$  بدلالة  $z$  :

$$\det = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z+2 \\ 1 & -2z \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4z+z-2}{2} = \frac{-3}{2}z - 1 \\ y = \frac{\begin{vmatrix} -z+2 & 4 \\ -2z & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-z+2+8z}{2} = \frac{7}{2}z + 1 \end{cases}$$

نعوض  $x$  و  $y$  في المعادلة (3) نحصل على :

$$-\left(\frac{3}{2}z - 1\right) - 2\left(\frac{7}{2}z + 1\right) + z + 1 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{3}{2}z + 1 - 7z - 2 + z + 1 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{-9}{2}z = 0 \quad \text{أي :}$$

$$z = 0 \quad \text{أي :}$$

بالتعويض في  $x$  و  $y$  نحصل على  $x = -1$  و  $y = 1$

نتيجة : الجملة تقبل حلا وحيدا هو الثلاثية  $\{(-1; 1; 0)\}$

#### التمرين 28

لتكن النقط  $E(6; 2; 3)$  ،  $D(-1; 0; 1)$  ،  $C(0; 1; 5)$  ،  $B(3; 0; 1)$  ،  $A(2; 1; 1)$

1 - تحقق أن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  تعرف مستويا  $(ABC)$  . يطلب معادلته الديكارتية

2 - عين التمثيل الوسيط للمستقيم  $(DE)$

3 - عين إحداثيات النقطة  $I$  نقطة تقاطع المستقيم  $(DE)$  و المستوي  $(ABC)$

#### الحل - 28

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} \quad -1$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-1 \\ 5-1 \end{pmatrix}$$

بما أن  $\frac{-2}{1} \neq \frac{0}{-1}$  فإن  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليسا متوازيان  
منه النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  تعين مستويا .

ليكن  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ -2a + 4c = 0 \end{cases} \quad \text{منه} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{AC} \perp \vec{u} \end{cases} \quad \text{إن :}$$

$$\begin{cases} a = b \\ c = \frac{2a}{4} \end{cases} \quad \text{منه}$$

من أجل  $a = 2$  نحصل على :  $b = 2$  و  $c = 1$

$$\text{منه : } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (ABC)$$

نتيجة : معادلة المستوي  $(ABC)$  هي :  $2x + 2y + z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي

$$A \in (ABC) \quad \text{إن : } 2(2) + 2(1) + 1 + \alpha = 0$$

$$\alpha = -7 \quad \text{منه}$$

منه : معادلة المستوي (ABC) هي :  $2x + 2y + z - 7 = 0$

$$\begin{aligned} \vec{DE} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{اي} \quad \vec{DE} = \begin{pmatrix} 6+1 \\ 2-0 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{DE} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{إذن : (DE) يشمل النقطة D و شعاع توجيهه} \\ \text{منه تمثيله الوسيطى :} & \begin{cases} x+1=7t \\ y-0=2t \\ z-1=2t \end{cases} \\ \text{اي :} & \begin{cases} x=7t-1 \\ y=2t \\ z=2t+1 \end{cases} \quad \text{حيث } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2(7t-1) + 2(2t) + (2t+1) - 7 = 0 \\ x=7t-1 \\ y=2t \\ z=2t+1 \end{cases} \quad \text{منه} \quad \begin{cases} 2x+2y+z-7=0 \\ x=7t-1 \\ y=2t \\ z=2t+1 \end{cases} \quad -3$$

$$\begin{cases} 14t-2+4t+2t-6=0 \\ x=7t-1 \\ y=2t \\ z=2t+1 \end{cases} \quad \text{اي}$$

$$\begin{cases} t=8/20=2/5 \\ x=7(2/5)-1 \\ y=2(2/5) \\ z=2(2/5)+1 \end{cases} \quad \text{اي}$$

$$\begin{cases} x=9/5 \\ y=4/5 \\ z=9/5 \end{cases} \quad \text{اي}$$

نتيجة : (DE) و (ABC) يتقاطعان في النقطة  $I(9/5; 4/5; 9/5)$

التمرين 29

لتكن النقط  $D(5; 2; 4)$  ،  $C(1; 4; 2)$  ،  $B(3; 2; 4)$  ،  $A(1; 0; 2)$   
نعرف النقط I ، J ، K كمايلي : I منتصف [AB] ، J منتصف [CD] ،  $\vec{BK} = \frac{1}{4} \vec{BC}$   
1 - عين احداثيات النقط I ، J ، K ثم تحقق أنها ليست على استقامة واحدة .

2 - تحقق أن الشعاع  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ناظمي للمستوي (IJK) ثم أكتب معادلة ديكارتية له .

3 - عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AD) ثم تحقق أن (IJK) و (AD) يتقاطعان في نقطة L حيث  $\vec{AL} = \frac{1}{4} \vec{AD}$

الحل - 29

$$I(2; 1; 3) \quad \text{اي} \quad I \left( \frac{3+1}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{4+2}{2} \right) \quad -1$$

$$J(3; 3; 3) \quad \text{اي} \quad J \left( \frac{5+1}{2}; \frac{2+4}{2}; \frac{4+2}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{لتكن } K(x; y; z) \quad \vec{BK} &= \frac{1}{4} \vec{BC} \\ \begin{cases} x-3 = \frac{1}{4}(1-3) \\ y-2 = \frac{1}{4}(4-2) \\ z-4 = \frac{1}{4}(2-4) \end{cases} & \quad \text{يكافئ} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ z = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة :  $k(5/2; 5/2; 7/2)$ 

$$\vec{IJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{IJ} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 3-3 \end{pmatrix} \quad \text{خلاصة :}$$

$$\vec{KJ} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{KJ} \begin{pmatrix} 3-\frac{5}{2} \\ 3-\frac{5}{2} \\ 3-\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

إذن :  $\vec{IJ}$  و  $\vec{KJ}$  ليسا متوازيان  $\frac{1/2}{1} \neq \frac{1/2}{2}$   
 منه : النقط I ، J ، K ليست على استقامة واحدة .

$$\vec{u} \cdot \vec{IJ} = -2(1) + 1(2) - 1(0) = -2 + 2 = 0 \quad -2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{JK} = -2(1/2) + 1(1/2) - 1(-1/2) = -1 + 1 = 0$$

$$\vec{u} : \vec{IJ} = 0 \quad \vec{u} : \vec{JK} = 0 \quad \text{نتيجة :} \quad \text{إذن : } \vec{u} \text{ عمودي على كل من } \vec{IJ} \text{ و } \vec{JK}$$

منه :  $\vec{u}$  شعاع ناظمي للمستوي (IJK)

إذن : (IJK) له المعادلة  $-2x + y - z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي  
 $-2(2) + 1 - 3 + \alpha = 0$  : إذن :  $I \in (IJK)$

منه  $\alpha = 6$ خلاصة : معادلة المستوي (IJK) :  $-2x + y - z + 6 = 0$ 

$$\vec{AD} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} \quad -3$$

$$\begin{cases} x-1=4t \\ y-0=2t \\ z-2=2t \end{cases} \quad \text{منه التمثيل الوسيطى للمستقيم (AD) :}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x=4t+1 \\ y=2t \\ z=2t+2 \end{cases} \quad \text{أي}$$

تقاطع (AD) و المستوي (IJK)

$$\begin{aligned} -2(4t+1) + 2t - (2t+2) + 6 &= 0 & \text{منه} & \begin{cases} -2x + y - z + 6 = 0 \\ x = 4t + 1 \\ y = 2t \\ z = 2t + 2 \end{cases} \\ -8t - 2 + 2t - 2t - 2 + 6 &= 0 & \text{أي} & \end{aligned}$$

$$t = \frac{-2}{-8}$$

$$t = 1/4$$

أي

$$\begin{cases} x = 4(1/4) + 1 = 2 \\ y = 2(1/4) = 1/2 \\ z = 2(1/4) + 2 = 5/2 \end{cases} \quad \text{منه :}$$

نتيجة :  $L(2; 1/2; 5/2)$



$$\vec{AL} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ أي } \vec{AL} \begin{pmatrix} 2-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ \frac{5}{2}-2 \end{pmatrix} \text{ إذن :}$$

$$4 \vec{AL} = \vec{AD} \text{ أي } 4 \vec{AL} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ منه :}$$

$$\vec{AL} = \frac{1}{4} \vec{AD} \text{ منه :}$$

## تمارين نماذج للبكالوريا

### التمرين 1

لتكن  $A(-1; 2; 0)$  نقطة من الفضاء .  
أكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  الذي يشمل  $A$  و  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  شعاع ناظمي له .

### الحل 1

$(P)$  له المعادلة  $x+y-z+\alpha=0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي

$A \in (P)$  إذن :  $-1+2-0+\alpha=0$

أي :  $\alpha = -1$

منه : معادلة المستوي  $(P)$  هي  $x+y-z-1=0$

ملاحظة : يمكن تعيين معادلة المستوي  $(P)$  بطريقة أخرى كما يلي :

لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء إذن :

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$$

$M \in (P)$  يكافئ  $\vec{AM} \perp \vec{u}$

يكافئ  $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$

يكافئ  $1(x+1) + 1(y-2) - 1(z) = 0$

يكافئ  $x+y-z-1=0$  و هي معادلة المستوي  $(P)$

### التمرين 2

لتكن  $A(1; 2; 3)$  نقطة من الفضاء و  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  شعاع .

1 - عين معادلة للمجموعة  $(E)$  من النقط  $M$  التي تحقق  $\vec{u} \cdot \vec{AM} = 2$

2 - ما هي طبيعة المجموعة  $(E)$  ؟

### الحل 2

1 - لتكن  $M(x; y; z)$  إذن :

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \cdot \vec{AM} = 2$  يكافئ  $1(x-1) + 2(y-2) - 1(z-3) = 0$

يكافئ  $x+2y-z-1-4+3=0$

يكافئ  $x+2y-z-2=0$  و هي معادلة  $(E)$

2 -  $(E)$  لها معادلة من الشكل  $ax+by+cz+d=0$  حيث  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$

إذن : (E) هي المستوي ذو المعادلة  $x + 2y - z - 2 = 0$

### التمرين 3

(P) مستوي معادلته  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - z = 0$

عين معلما ديكارتيا للمستوي (P)

### الحل 3

يكفي تعيين ثلاث نقط من المستوي (P) ليست على استقامة واحدة .

ليكن  $x=0$  و  $y=0$  إذن :  $z=0$  منه  $A(0; 0; 0)$  نقطة من (P)

ليكن  $x=1$  و  $y=2$  إذن :  $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} - z = 0$  أي  $z=1$

منه  $B(1; 2; 1)$  نقطة من (P)

ليكن  $x=0$  و  $y=4$  إذن :  $0 + \frac{4}{4} - z = 0$  منه  $z=1$

إذن :  $C(0; 4; 1)$  نقطة من (P)

نتيجة :  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

إذن :  $\vec{AC}$  و  $\vec{AB}$  ليسا متوازيان .  $\frac{0}{1} \neq \frac{4}{2}$

منه : الثلاثية  $(A; \vec{AB}; \vec{AC})$  تعين معلما ديكارتيا للمستوي (P)

### التمرين 4

(P) هو المستوي ذو المعادلة  $x + y - 2z + 3 = 0$

نعتبر النقطة  $A(2; -3; 1)$  و الشعاعين  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$  و  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

بين أن  $(A; \vec{u}; \vec{v})$  معلم متعامد في المستوي (P)

### الحل 4

حتى يكون  $(A; \vec{u}; \vec{v})$  معلما للمستوي (P) يلزم و يكفي أن تتحقق الشروط التالية :

$$\left. \begin{array}{l} (1) : A \in (P) \\ (2) : \text{توجد نقطة } B \text{ من } (P) \text{ حيث } \vec{AB} = \vec{u} \\ (3) : \text{توجد نقطة } C \text{ من } (P) \text{ حيث } \vec{AC} = \vec{v} \\ (4) : \vec{AB} \text{ و } \vec{AC} \text{ ليسا متوازيان} \end{array} \right\}$$

هل الشرط (1) محقق ؟ نعوض إحداثيات A في معادلة (P) كما يلي :

$$2 - 3 - 2(1) + 3 = 2 - 2 = 0$$

إذن :  $A \in (P)$  أي الشرط (1) محقق .

هل الشرط (2) محقق ؟ لنكن  $B(x; y; z)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2 = 1 \\ y + 3 = 1 \\ z - 1 = 1 \end{array} \right. \quad \text{يكافئ} \quad \vec{AB} = \vec{u}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{array} \right. \quad \text{يكافئ}$$

منه :  $B(3; -2; 2)$

هل  $B \in (P)$  ؟  $3 - 2 - 2(2) + 3 = 6 - 6 = 0$

نتيجة :  $\left. \begin{array}{l} B \in (P) \\ \vec{AB} = \vec{u} \end{array} \right\}$  إذن : الشرط (2) محقق .

هل الشرط (3) محقق ؟ لنكن  $C(x; y; z)$

$$\begin{cases} x - 2 = 3 \\ y + 3 = -3 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \vec{AC} = \vec{v}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -6 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

منه :  $C(5; -6; 1)$

هل  $C \in (P)$  ؟  $5 - 6 - 2(1) + 3 = 8 - 8 = 0$

نتيجة :  $\left\{ \begin{array}{l} C \in (P) \\ \vec{AC} = \vec{v} \end{array} \right\}$  إذن : الشرط (3) محقق .

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{هل الشرط (4) محقق ؟ لدينا}$$

بما أن  $\frac{3}{1} \neq \frac{-3}{1}$  فإن  $\vec{AC}$  و  $\vec{AB}$  ليسا متوازيان

إذن : الشرط (4) محقق .

خلاصة : الشروط (1) ، (2) ، (3) ، (4) محققة إذن  $(A; \vec{u}; \vec{v})$  هو فعلا معلم للمستوي (P)

يبقى أن نتحقق أن  $\vec{u} \perp \vec{v}$  حتى يكون المعلم متعامد .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(1) - 3(1) + 0(1) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

إذن :  $\vec{u} \perp \vec{v}$

منه : المعلم  $(A; \vec{u}; \vec{v})$  معلم متعامد .

#### التمرين 5 =

(P) مستوي يشمل النقط  $A(1; -1; -1)$  ،  $B(0; 1; 1)$  ،  $C(1; 2; 0)$

1 - عين شعاعا ناظميا لـ (P)

2 - استنتج معادلة ديكرتية لـ (P)

#### الحل = 5

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} \quad -1$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2+1 \\ 0+1 \end{pmatrix}$$

بما أن  $\frac{0}{-1} \neq \frac{3}{2}$  فإن  $A$  ،  $B$  ،  $C$  ليست على استقامة واحدة

إذن فعلا النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  تعين مستوي و ليكن (P)

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{شعاع ناظمي لـ (P)}$$

$$\begin{cases} -a + 2b + 2c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} a = 2b + 2c \\ c = -3 \end{cases} \quad \text{من أجل } b = 1 \text{ نحصل على :}$$

$$\begin{cases} a = 2 + 2(-3) = -4 \\ c = -3 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

نتيجة :  $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  شعاع ناظمي للمستوي (P)

$$-2 \quad \vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{شعاع ناظمي لـ } (P) \text{ إذن } (P) \text{ له المعادلة :}$$

$$-4x + y - 3z + \alpha = 0 \quad \text{حيث } \alpha \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$A \in (P) \quad \text{إذن : } -4(1) - 1 - 3(-1) + \alpha = 0$$

$$\alpha = 2 \quad \text{أي}$$

$$\text{منه : معادلة المستوى } (P) \text{ هي : } -4x + y - 3z + 2 = 0$$

التمرين 6

(P) هو مجموعة النقط المعرفة بالتمثيل الوسيط التالي :

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2m \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - m \end{cases} \quad \text{حيث } t \in \mathbb{R} \text{ و } m \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{تكن النقطة } A(1; -2; 1) \text{ و الشعاعين}$$

1 - بين أن (P) هو مستوي للمعلم  $(A; \vec{u}; \vec{v})$

2 - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

الحل 6

$$1 - \text{من أجل } t=0 \text{ و } m=0 \text{ نحصل على}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}$$

منه النقطة  $A(1; -2; 1)$  تنتمي إلى (P)

لتكن  $B(x; y; z)$  نقطة من الفضاء .

$$\vec{AB} = \vec{u} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x-1=1 \\ y+2=3 \\ z-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

منه :  $B(2; 1; 1)$

$$\text{من أجل } t=1 \text{ و } m=0 \text{ نحصل على}$$

$$\begin{cases} x=1+1+0=2 \\ y=-2+3=1 \\ z=1-0=1 \end{cases}$$

منه النقطة  $B(2; 1; 1)$  تنتمي إلى (P)

لتكن  $C(x; y; z)$  نقطة من الفضاء .

$$\vec{AC} = \vec{v} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x-1=2 \\ y+2=0 \\ z-1=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

منه :  $C(3; -2; 0)$

$$\text{من أجل } t=0 \text{ و } m=1 \text{ نحصل على}$$

$$\begin{cases} x=1+0+2=3 \\ y=-2+0=-2 \\ z=1-1=0 \end{cases}$$

منه :  $C(3; -2; 0)$  تنتمي إلى (P)

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بما أن  $2/1 \neq 0/3$  فإن  $C, B, A$  ليست على استقامة واحدة  
 خلاصة:  $C, B, A$  ليست على استقامة واحدة من نفس المجموعة (P)  
 إذن: (P) هو المستوي للمعلم  $(A; \vec{AB}; \vec{AC})$  أي المعلم  $(A; \vec{u}; \vec{v})$

$$2 - \text{ليكن } \vec{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+3b=0 \\ 2a-c=0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \vec{w} \perp \vec{AB} \\ \vec{w} \perp \vec{AC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3+3b=0 \\ 6-c=0 \end{cases} \text{ من أجل } a=3 \text{ نحصل على}$$

$$\begin{cases} b=-1 \\ c=6 \end{cases} \text{ أي}$$

$$\text{نتيجة: } \vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (P)}$$

منه (P) له المعادلة  $3x - y + 6z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي  
 $A \in (P)$  إذن:  $3(1) - (-2) + 6(1) + \alpha = 0$   
 $\alpha = -11$  أي

منه: (P) له المعادلة  $3x - y + 6z - 11 = 0$

$$\text{تحقيق: } \begin{cases} x=1+t+2m \\ y=-2+3t \\ z=1-m \end{cases} \text{ إذن: } 3x - y + 6z - 11 = 3 + 3t + 6m + 2 - 3t + 6 - 6m - 11 = 3t + 6m - 3t - 6m + 11 - 11 = 0$$

#### التمرين 7 =

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة  $A(1; -2; 3)$  و  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  شعاعي توجيه له.

#### الحل = 7

$$\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ هما شعاعي الوحدة مستقلين خطيا}$$

$$\text{ليكن } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (P)}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{i} \\ \vec{u} \perp \vec{j} \end{cases}$$

$$\text{منه: } \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي لـ (P)}$$

$$\text{ليكن } c=1 \text{ إذن: } \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي لـ (P)}$$

منه: (P) له المعادلة  $z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي.

$$A \in (P) \text{ إذن: } 3 + \alpha = 0$$

$$\alpha = -3 \text{ منه}$$

نتيجة: (P) له المعادلة  $z - 3 = 0$

#### التمرين 8 =

$$(P) \text{ مجموعة معرفة بـ } \begin{cases} x=2-t+m \\ y=1+3m \\ z=1-t \end{cases} \text{ حيث } t \in \mathbb{R} \text{ و } m \in \mathbb{R}$$

بين أن (P) هو مستوي يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .

الحل - 8

$$\begin{cases} -3x = -6 + 3t - 3m \\ y = 1 + 3m \\ 3z = 3 - 3t \end{cases} \quad \text{منه} \quad \begin{cases} x = 2 - t + m \\ y = 1 + 3m \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$-3x + y + 3z = -6 + 3t - 3m + 1 + 3m + 3 - 3t \quad \text{منه}$$

$$-3x + y + 3z = -2 \quad \text{منه}$$

$$-3x + y + 3z + 2 = 0 \quad \text{منه}$$

نتيجة : (P) هي جزء من المستوي ذو المعادلة  $-3x + y + 3z + 2 = 0$  لندرس الآن الحالة العكسية .

ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة  $-3x + y + 3z + 2 = 0$

$$\begin{cases} y = 1 + 3m \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{نضع} \quad \begin{cases} -3x + (1 + 3m) + 3(1 - t) + 2 = 0 \\ -3x + 1 + 3m + 3 - 3t + 2 = 0 \end{cases}$$

$$-3x + 1 + 3m + 3 - 3t + 2 = 0 \quad \text{منه}$$

$$-3x + 3m - 3t + 6 = 0 \quad \text{منه}$$

$$-3x = -3m + 3t - 6 \quad \text{منه}$$

$$x = m - t + 2 \quad \text{منه}$$

$$x = 2 - t + m \quad \text{منه}$$

نتيجة : (Q) هو جزء من (P)

خلاصة : (P)  $\subset$  (Q) و (Q)  $\subset$  (P) إذن : (P) = (Q)

أي (P) هو المستوي ذو المعادلة  $-3x + y + 3z + 2 = 0$

التمرين - 9

(P) مستوي معادلته  $2x + y - 2z + 5 = 0$

1 - عين  $\vec{u}$  شعاع ناظمي للمستوي (P)

2 - بين أن الشعاع  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  هو شعاع توجيه للمستوي (P)

الحل - 9

$$1 - \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{هو شعاع ناظمي لـ (P)}$$

$$2 - \vec{u} \cdot \vec{v} = 2(1) + 1(0) - 2(1) = 2 - 2 = 0$$

إذن :  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدان .

منه :  $\vec{v}$  هو شعاع توجيه للمستوي (P)

التمرين - 10

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة  $A(-3; 1; 2)$  و يوازي المستقيمين (D) و (T) اللذين تمثيلهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$$\text{حيث } \begin{cases} x = 2 + k \\ y = -5 + k \\ z = 4 + k \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \text{ و } t \in \mathbb{R}$$

الحل - 10

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{شعاع توجيه للمستقيم (D) و} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{شعاع توجيه المستقيم (T)}$$

$$\text{ليكن } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{شعاع ناظمي للمستوي (P)}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ \vec{v} \perp \vec{n} \end{cases} \\ & \begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{cases} \quad \text{من أجل } a = 1 \text{ نحصل على} \\ & \begin{cases} b = 1 + c \\ 2 + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{منه :} \\ & \begin{cases} b = 1 + c \\ c = -1 \end{cases} \quad \text{منه :} \\ & \begin{cases} b = 1 - 1 = 0 \\ c = -1 \end{cases} \quad \text{منه :} \end{aligned}$$

نتيجة :  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  هو شعاع باظمي للمستوي (P) منه (P) له المعادلة  $x - z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي .

$$A \in (P) \quad \text{إذن : } -3 - 2 + \alpha = 0$$

$$\alpha = 5 \quad \text{أي}$$

$$\text{منه : (P) له المعادلة } x - z + 5 = 0$$

### التمرين 11 -

(D) و (T) مستقيمان معرفان بالتمثيلين الوسيطيين التاليين على الترتيب :

$$\text{حيث } \begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = 2k \\ z = -5 - k \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \text{ و } t \in \mathbb{R}$$

بين أن يوجد مستوي وحيد (P) يشمل (D) و (T) يطلب معادلته الديكارتية

### الحل 11 -

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه للمستقيم (D) و } \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه المستقيم (T)}$$

$$-3/2 \neq 1/2 \quad \text{إذن : } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ ليسا مرتبطين خطيا .}$$

$$\text{منه : (D) و (T) ليسا متوازيان .}$$

$$\text{إذن : إما (D) و (T) من نفس المستوي متقاطعان}$$

$$\text{أو (D) و (T) من مستويين مختلفين}$$

$$\text{نبحث عن تقاطع (D) و (T) :}$$

$$\begin{cases} 5 + 1 + t = 2 - 3t \\ 2k = 1 + t \end{cases} \quad \text{منه :} \quad \begin{cases} 5 + 2k = 2 - 3t \\ 2k = 1 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t = -4 \\ k = \frac{1+t}{2} \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ k = 0 \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$\text{من أجل } k = 0 \text{ نحصل على : } \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

$$\text{من أجل } t = -1 \text{ نحصل على : } \begin{cases} x = 2 - 3(-1) = 5 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = -3 + 2(-1) = -5 \end{cases}$$

$$\text{نتيجة : (D) و (T) يتقاطعان في النقطة } A(5; 0; -5)$$

منه : (D) و (T) ينتميان إلى نفس المستوي الوحيد (P)

البحث عن معادلة (P) لدينا (P) يشمل النقطة  $A(5; 0; -5)$  و شعاعي توجيهه  $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  و  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  ليكن  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  شعاع ناظمي للمستوي (P)

$$\begin{cases} -3a + b + 2c = 0 \\ 2a + 2b - c = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ \vec{n} \perp \vec{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2c - 3 = 0 \\ 2b - c + 2 = 0 \dots (1) \end{cases} \quad \text{من أجل } a = 1 \text{ نحصل على :}$$

$$\begin{cases} b + 2c - 3 = 0 \\ 4b - 2c + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$\text{بالجمع : } 5b + 1 = 0 \text{ أي } b = -1/5$$

$$\text{بالتعويض في (1) : } -\frac{2}{5} - c + 2 = 0 \text{ منه } c = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

نتيجة :  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}$  هو شعاع ناظمي لـ (P) أي  $\vec{m} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$  هو أيضا شعاع ناظمي له

منه (P) له المعادلة  $5x - y + 8z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي

$$A \in (P) \quad \text{إذن : } 5(5) - 0 + 8(-5) + \alpha = 0$$

$$\alpha = 15 \quad \text{أي :}$$

خلاصة : المستوي (P) الوحيد الذي يشمل (D) و (T) له المعادلة :  $5x - y + 8z + 15 = 0$

$$\text{تحقيق : } 5(2 - 3t) - (1 + t) + 8(-3 + 2t) + 15 = 10 - 15t - 1 - t - 24 + 16t + 15 = 0$$

$$5(5 + 2k) - 2k + 8(-5 - k) + 15 = 25 + 10k - 2k - 40 - 8k + 15 = 0$$

### التمرين 12

(P) مستوي معادلته  $2x + y - z + 1 = 0$  و (Q) مستوي معادلته  $-x + 3y - 2z + 4 = 0$

1 - بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان

2 - عين شعاع توجيه و نقطة من مستقيم تقاطعهما .

### الحل 12

$$1 - \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (Q)}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (P)}$$

$$\vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ ليسا متوازيان } -1/2 \neq 3/1$$

منه : المستويان (P) و (Q) ليسا متوازيان فهما إذن متقاطعان .

2 - البحث عن تقاطع (P) و (Q)

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ -x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

لنبحث عن x و y بدلالة z

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$

$$x = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & -z+1 \\ 3 & -2z+4 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(-2z+4+3z-3) = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}$$



$$y = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} -z+1 & 2 \\ -2z+4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} (z-1+4z-8) = \frac{5}{7} z - \frac{9}{7}$$

نتيجة : تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) الذي تمثله الوسيطية :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{7} t + \frac{1}{7} \\ y = \frac{5}{7} t - \frac{9}{7} \\ z = t \end{cases}$$

منه :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix}$  هو شعاع توجيه المستقيم (D) و  $A(1/7; -9/7; 0)$  هي نقطة منه .

التمرين = 13

(P) مستوي معادلته  $x+y-z=0$  و (Q) مستوي معادلته  $2x-y-z-1=0$

عين شعاع توجيه المستقيم (D) حيث  $(D) = (P) \cap (Q)$

الحل = 13

لنبحث عن التمثيل الوسيطية للمستقيم (D)

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -z \\ -1 & -z-1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3} (-z-1-z) = \frac{2}{3} z + \frac{1}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} -z & 1 \\ -z-1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3} (-2z+z+1) = \frac{1}{3} z - \frac{1}{3} \end{cases}$$

نتيجة : (D) له التمثيل الوسيطية التالي :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} t - \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

منه :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$  هو شعاع توجيه المستقيم (D)

التمرين = 14

لتكن النقط  $A(0; 1; 1)$  ،  $B(1; 0; 0)$  ،  $C(-1; 2; 1)$  ،  $D(0; 1; 2)$

بين أن النقط A ، B ، C ، D من نفس المستوي ثم عين معادلة ديكارتية له .

الحل = 14

ليكن (P) مستوي معادلته  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda = 0$  حيث  $\alpha$  ،  $\beta$  ،  $\gamma$  ،  $\lambda$  ثوابت حقيقية . تكون النقط A ، B ، C ، D من نفس المستوي (P) إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} \beta + \gamma + \lambda = 0 & (1) \\ \alpha + \lambda = 0 & (2) \\ -\alpha + 2\beta + \gamma + \lambda = 0 & (3) \\ \beta + 2\gamma + \lambda = 0 & (4) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} \alpha(0) + \beta(1) + \gamma(1) + \lambda = 0 \\ \alpha(1) + \beta(0) + \gamma(0) + \lambda = 0 \\ \alpha(-1) + \beta(2) + \gamma(1) + \lambda = 0 \\ \alpha(0) + \beta(1) + \gamma(2) + \lambda = 0 \end{cases}$$

من (2) :  $\lambda = -\alpha$

بالتعويض في (3) نحصل على :  $\lambda + 2\beta + \gamma + \lambda = 0$

أي :  $2\beta + \gamma + 2\lambda = 0$  ..... (5)

$$\begin{cases} \beta + \gamma + \lambda = 0 & \text{(a)} \\ 2\beta + \gamma + 2\lambda = 0 & \text{(b)} \\ \beta + 2\gamma + \lambda = 0 & \text{(c)} \\ \lambda - \alpha & \text{(d)} \end{cases} \quad \text{نتيجة :}$$

نطرح (a) من (c) نحصل على :  $2\gamma - \gamma = 0$  أي  $\gamma = 0$   
نعوض  $\gamma$  في (a) و (b) و (c) نحصل على :  

$$\begin{cases} \beta + \lambda = 0 \\ 2\beta + 2\lambda = 0 \\ \beta + \lambda = 0 \end{cases}$$
  
أي  $\beta + \lambda = 0$   
منه :  $\beta = -\lambda$

خلاصة :  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  ،  $\gamma = 0$  ،  $\beta = -\lambda$  ،  $\alpha = -\lambda$   
إذن : يكفي أن نأخذ  $\lambda = -1$  منه  $\alpha = \beta = 1$   
و عليه فإن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى المستوي (P) ذو المعادلة  $x + y - 1 = 0$   
تحقيق :

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{AB} &= 1 - 1 + 0 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} &= -1 + 1 + 0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن : } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ليكن}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{AB} \\ \vec{u} \perp \vec{AC} \end{aligned} \right\} \quad \text{منه :}$$

إذن :  $\vec{u}$  شعاع ناظمي للمستوي (ABC)  
منه : معادلة (ABC) :  $x + y + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي .  
 $A \in (ABC)$  إذن :  $0 + 1 + \alpha = 0$  منه  $\alpha = -1$   
نتيجة : معادلة (ABC) هي :  $x + y - 1 = 0$   
 $D(0; 1; 2)$  تنتمي إلى (ABC) :  $0 + 1 - 1 = 0$

#### التمرين 15

لتكن النقط  $C(2; 2; 2)$  ،  $B(1; -6; -1)$  ،  $A(-1; 2; 1)$   
1 - بين أن النقط A ، B ، C تعرف مستويا وليكن (ABC)  
2 - عين تقاطع المستوي (ABC) مع المستوي (P) ذو المعادلة  $x - 3y + z - 4 = 0$   
الحل 15

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1+1 \\ -6-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\frac{3}{2} \neq \frac{0}{-8}$  منه  $\vec{AC}$  و  $\vec{AB}$  ليسا متوازيان .  
إذن : النقط A ، B ، C تعين مستويا (ABC)  
لنبحث عن معادلة المستوي (ABC)

$$\text{ليكن } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)}$$

$$\begin{cases} 2a - 8b - 2c = 0 \\ 3a + c = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 8b + 6 = 0 \\ 3a - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{من أجل } c = -3 \text{ نحصل على :}$$

$$\begin{cases} 2a + 6 - 8b \\ a = 1 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} 2 + 6 = 8b \\ a = 1 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\text{نتيجة : } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)}$$

منه : معادلة المستوي (ABC) :  $x + y - 3z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي .

$$-1 + 2 - 3 + \alpha = 0 \quad \text{إذن : } A \in (ABC)$$

$$\alpha = 2 \quad \text{أي :}$$

خلاصة : معادلة المستوي (ABC) هي  $x + y - 3z + 2 = 0$

$$\begin{cases} x - 3y + z - 4 = 0 \\ x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{لنبحث عن } x \text{ و } y \text{ بدلالة } z \quad -2$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -3 & z-4 \\ 1 & -3z+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (9z - 6 - z + 4) = 2z - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} z-4 & 1 \\ -3z+2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (z - 4 + 3z - 2) = z - \frac{3}{2} \end{cases}$$

نتيجة : المستوي (ABC) يتقاطع مع المستوي (P) في المستقيم الذي تمثله الوسيط :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = 2t - \frac{1}{2} \\ y = t - \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases}$$

#### التمرين 16

(P) و (Q) مستويان معادلاتهما على الترتيب  $x + y + z = 0$  و  $x - y + z - 4 = 0$

1 - عين تمثيلا وسيطيا للمستقيمين (d) تقاطع المستويين (P) و (Q)

2 - عين معادلة ديكارتية للمستوي (R) الذي يشمل النقطة  $A(1; 1; 2)$  و العمودي على (d)

#### الحل 16

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{نبحث عن } x \text{ و } y \text{ بدلالة } z \quad -1$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & z \\ -1 & z-4 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} (z - 4 + z) = -z + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} z & 1 \\ z-4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} (z - z + 4) = -2 \end{cases}$$

$$\text{نتيجة : (d) له التمثيل الوسيط التالي :} \quad \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in \mathbb{R}$$

(d) هو شعاع توجيه المستقيم  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2$   
 بما أن (R) عمودي على (d) فإن  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  هو شعاع ناظمي للمستوي (R)

منه : (R) له المعادلة  $-x + z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي .  
 $-1 + 2 + \alpha = 0$  إذن :  $A \in (R)$   
 $\alpha = -1$  أي

نتيجة : معادلة المستوي (R) هي :  $-x + z - 1 = 0$

#### التمرين 17

(P) ، (Q) ، (R) ثلاث مستويات معادلاتها الديكارتية كما يلي :

(P) :  $2x + 3y - z = -2$

(Q) :  $5y - 4z = 1$

(R) :  $z = 1$

بين أن المستويات (P) ، (Q) ، (R) تشترك في نقطة وحيدة بطلب تعيينها .

#### الحل 17

إذا وجدت نقطة مشتركة بين المستويات (P) ، (Q) ، (R) فإن إحداثياتها (x ; y ; z) هي حل للجملة

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 & (1) \\ 5y - 4z = 1 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

نعوض z في المعادلة (2) نحصل على :

$5y = 5$  أي :

$y = 1$  منه

نعوض z و y في المعادلة (1) نحصل على :

$2x = -4$  أي :

$x = -2$  منه

نتيجة : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في نقطة وحيدة A(-2 ; 1 ; 1)

#### التمرين 18

فسر هندسيا جملة المعادلتين :  $\begin{cases} 4x + 6y - 12z = 5 \\ 6x + 9y - 18z = 8 \end{cases}$

#### الحل 18

إذا اعتبرنا في الفضاء (P) المستوي ذو المعادلة  $4x + 6y - 12z - 5 = 0$  والمستوي (Q) ذو المعادلة  $6x + 9y - 18z - 8 = 0$  فإن الجملة  $\begin{cases} 4x + 6y - 12z = 5 \\ 6x + 9y - 18z = 8 \end{cases}$

تعبّر عن تقاطع المستويين (P) و (Q) كمايلي :  $\det = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

نتيجة : إما المستويين (P) و (Q) متطابقين أو متوازيين لا يتقاطعان

بما أن  $\left. \begin{aligned} 4/6 &= 6/9 = -12/-18 = 2/3 \\ -5/8 &\neq 2/3 \end{aligned} \right\}$

فإن المستويين (P) و (Q) ليسا متطابقين فهما إذن متوازيان تماما . (لا يتقاطعان) و عليه فإن الجملة لا تقبل حولا .

#### التمرين 19

لتكن الجملة (I)  $\begin{cases} x + y = -1 & (1) \\ 2x + y + 2z = 0 & (2) \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 & (3) \end{cases}$

نفرض أن المعادلة (1) هي معادلة مستوي (P) و أن المعادلة (2) هي معادلة مستوي (Q)  
 1 - أثبت أن (P) و (Q) يتقاطعان في مستقيم (d) يشمل النقطة A(1 ; -2 ; 0) و موجه بالشعاع  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 2 - ليكن (R) المستوي ذو المعادلة (3)

تحقق أن (d) و (R) يتقاطعان في نقطة وحيدة ثم استنتج حلول الجملة (I)

الحل - 19

$$\begin{cases} x + y = -1 & (1) \\ 2x + y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

ب طرح (1) من (2) نحصل على :  $2x - x + 2z = 0 + 1$

$$x = 1 - 2z \quad \text{أي :}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على :  $1 - 2z + y = -1$

$$y = 2z - 2 \quad \text{منه}$$

نتيجة : تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (d) ذو التمثيل الوسيطى التالي :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = t \end{cases}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

منه (d) يشمل النقطة  $A(1; -2; 0)$  (من أجل  $t = 0$ ) وله شعاع توجيه

$$\begin{cases} 4x + 4y + z + 3 = 0 & \text{هي حلول الجملة (R) و (d) تقاطع} \\ x = -2t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = t \end{cases}$$

$$4(-2t + 1) + 4(2t - 2) + t + 3 = 0 \quad \text{منه :}$$

$$-8t + 4 + 8t - 8 + t + 3 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$t = 1 \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} x = -2(1) + 1 = -1 \\ y = 2(1) - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{منه :}$$

نتيجة : (d) و (R) يتقاطعان في نقطة وحيدة  $w(-1; 0; 1)$

إذن : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في نقطة وحيدة  $w(-1; 0; 1)$  منه الجملة (I) تقبل حلا وحيدا هو  $(-1; 0; 1)$

التمرين - 20

(P) و (Q) مستويين معادلاتهما على الترتيب  $2x - y + 5 = 0$  و  $3x + y - z = 0$

بين أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم تمثيله الوسيطى

$$t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \end{cases}$$

الحل - 20

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 & (1) \\ 3x + y - z = 0 & (2) \end{cases}$$

ب جمع (1) و (2) نحصل على :  $5x - z + 5 = 0$  أي :  $z = 5x + 5$

المعادلة (1) تكافئ  $y = 2x + 5$

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ z = 5x + 5 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{منه الجملة}$$

$$\text{و هو التمثيل الوسيطى لتقاطع المستويين (P) و (Q) تكافئ} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

التمرين - 21

حل في  $\mathbb{R}^3$  جمل المعادلات التالية ثم فسر النتائج هندسيا

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = -1 & -2 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 2y + z = 4 & -1 \\ 4x - 2y + z = -2 \\ 4x - y = 0,5 \end{cases}$$

## الحل - 21

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 4 \dots\dots\dots (a) & -1 \\ 4x - 2y + z = -2 \dots\dots\dots (b) \\ 4x - y = 0,5 \dots\dots\dots (c) \end{cases}$$

بجمع (a) و (b) نحصل على :

$$8x + 2z = 2 \quad \text{منه :}$$

$$8x = 2 - 2z \quad \text{اي :}$$

$$x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}z \quad \text{بالتعويض في (c) نحصل على :}$$

$$4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}z\right) - y = 0,5 \quad \text{اي :}$$

$$1 - z - 0,5 = y \quad \text{اي :}$$

$$0,5 - z = y$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}z \\ y = 0,5 - z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{نتيجة : حلول الجملة (1) هي مجموعة غير منتهية من الثلاثيات (x ; y ; z) حيث}$$

التفسير الهندسي : إذا كانت (P) ، (Q) ، (R) ثلاث مستويات معادلاتها على الترتيب

$$4x + 2y + z - 4 = 0 \quad ; \quad 4x - 2y + z + 2 = 0 \quad ; \quad 4x - y - 0,5 = 0$$

فإن المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في مستقيم تمثيله الوسيط هو

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t \\ y = 0,5 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = -1 \dots\dots\dots (a) & -2 \\ 2x + 3y + z = -1 \dots\dots\dots (b) \\ x + y + z = 1 \dots\dots\dots (c) \end{cases}$$

ب طرح (b) من (a) نحصل على :

$$3x + 3z = 0 \quad \text{منه :}$$

$$x = -z$$

بالتعويض في (c) نحصل على :

$$-z + y + z = 1 \quad \text{اي :}$$

$$y = 1$$

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{نتيجة : حلول الجملة (2) هي مجموعة غير منتهية من الثلاثيات (x ; y ; z) حيث}$$

التفسير الهندسي : المستويات التي معادلاتها  $5x + 3y + 4z + 1 = 0$  و  $2x + 3y + z + 1 = 0$

$$\text{و } x + y + z - 1 = 0 \text{ تتقاطع في مستقيم تمثيله الوسيط هو : } \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in \mathbb{R}$$

## التمرين - 22

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة (E)  $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$  ذات المجهول z

1- تحقق أن 8 حل للمعادلة (E) ثم استنتج الحلين الآخرين .

2- لتكن A ، B ، C نقط لواقعها على الترتيب  $a = 2 - 2i\sqrt{3}$  ،  $b = 2 + 2i\sqrt{3}$  ،  $c = 8$

(a) أحسب طولية و عمدة a

(b) احسب  $q = \frac{a-c}{b-c}$  ثم عين طولية و عمدة له .

(c) ما هي طبيعة المثلث ABC

(d) عين D مرجح الجملة  $\{(A ; |a|) ; (B ; |b|) ; (C ; |c|)\}$

(e) عين المجموعة (T) من النقط M حيث  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$

## الحل - 22

$$(8)^3 - 12(8)^2 + 48(8) - 128 = 8(64 - 96 + 48 - 16) : z = 8 \text{ من أجل } 1$$

$$= 8(112 - 112)$$

(E) إذن :  $z = 8$  هو حل لـ

الحلول الأخرى :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 12z^2 + 48z - 128 & z - 8 \\ \hline z^3 - 8z^2 & z^2 - 4z + 16 \\ \hline -4z^2 + 48z - 128 & \\ -4z^2 + 32z & \\ \hline 16z - 128 & \\ 16z - 128 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

نتيجة : الحلول الأخرى للمعادلة (E) هي حلول المعادلة  $z^2 - 4z + 16 = 0$  في C كما يلي :

$$\Delta = 16 - 4(16) = -3(16) = (4i\sqrt{3})^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 2 - 2i\sqrt{3} \\ z_2 = \frac{4 + 4i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة (E) هي  $\{8; 2 - 2i\sqrt{3}; 2 + 2i\sqrt{3}\}$

$$|a| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{منه } a = 2 - 2i\sqrt{3} \quad (a = 2$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{لتكن } \theta = \text{Arg}(a) \text{ إذن :}$$

$$\theta = \frac{-\pi}{3} \quad \text{منه :}$$

$$q = \frac{a-b}{b-c} \quad (b)$$

$$= \frac{2 - 2i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3}}{2 + 2i\sqrt{3} - 8}$$

$$= \frac{-4i\sqrt{3}}{-6 + 2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-2i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-2i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \times \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6i\sqrt{3} - 6}{9 + 3}$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|q| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

منه :

$$\begin{cases} \cos \alpha = -1/2 \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{لتكن } \alpha = \text{Arg}(q) \text{ إذن :}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} \quad \text{منه :}$$

$$AB^2 = |a - b|^2 = |2 - 2i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3}|^2 = |-4i\sqrt{3}|^2 = 48 \quad (c)$$

$$AC^2 = |a - c|^2 = |2 - 2i\sqrt{3} - 8|^2 = |-6 - 2i\sqrt{3}|^2 = 36 + 12 = 48$$

$$BC^2 = |b - c|^2 = |2 + 2i\sqrt{3} - 8|^2 = |-6 + 2i\sqrt{3}|^2 = 48$$

منه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$|a| = 4 \quad (d)$$

$$|b| = |\bar{a}| = |a| = 4$$

$$|c| = |8| = 8$$

$$z_d = \frac{4a + 4b + 8c}{8 + 4 + 4} \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{8 - 8i\sqrt{3} + 8 + 8i\sqrt{3} + 64}{16}$$

$$= 5$$

إذن : احداثيات النقطة D هي : (5 ; 0)  
2 - من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا  $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = 4\vec{MD}$  لأن D هي مرجح الجملة  $\{(A; 1); (B; 1); (C; 2)\}$  و هي نفسها مرجح الجملة  $\{(A; 4); (B; 4); (C; 8)\}$  بضرب كل المعاملات في 1/2

من جهة أخرى الشعاع  $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$  مستقل عن النقطة M لأن مجموع المعاملات معدوم .

إذن : من أجل M تنطبق على C نحصل على :  $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{CA} + \vec{CB}$

$$\|4\vec{MD}\| = \|\vec{CA} + \vec{CB}\| \quad \text{يكافئ} \quad \|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\| \quad \text{نتيجة :}$$

$$\|\vec{MD}\| = \frac{1}{4} \|\vec{CA} + \vec{CB}\| \quad \text{يكافئ}$$

$$MD = \frac{1}{4} |a - c + b - c| \quad \text{يكافئ}$$

$$MD = \frac{1}{4} |2 - 2i\sqrt{3} - 8 + 2 + 2i\sqrt{3} - 8| \quad \text{يكافئ}$$

$$MD = \frac{1}{4} |-12| \quad \text{يكافئ}$$

$$MD = 3 \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : (T) هي الدائرة التي مركزها D(5 ; 0) و نصف قطرها 3

### التمرين 23

لتكن  $(P_m)$  مجموعة نقط الفضاء ذات الاحداثيات  $(x; y; z)$  حيث

$$(3 - m)x + 4y - (1 + 2m)z - 5 = 0 \quad \text{مع } m \text{ وسيط حقيقي .}$$

1 - بين أن من أجل كل m من IR فإن  $(P_m)$  مستوي

2 - عين نقطة و شعاع توجيه المستقيم (D) تقاطع  $(P_1)$  و  $(P_0)$

3 - بين أن (D) محتواة في كل المستويات  $(P_m)$

### الحل 23

1 - من أجل كل m من IR لدينا :  $(3 - m; 4; 1 + 2m) \neq (0; 0; 0)$

إذن : من أجل كل  $m \in \text{IR}$  فإن  $(P_m)$  هو مستوي .

$$(1) \dots\dots\dots 3x + 4y - z - 5 = 0 \quad \text{معادلة } (P_0)$$

$$(2) \dots\dots\dots 2x + 4y - 3z - 5 = 0 \quad \text{معادلة } (P_1)$$



نطرح (2) من (1) نحصل على :

$$x + 2z = 0 \quad \text{منه : } x = -2z$$

نعوض  $x$  في (1) نحصل على :

$$3(-2z) + 4y - z - 5 = 0 \quad \text{منه : } 4y = 7z + 5$$

$$y = \frac{7}{4}z + \frac{5}{4} \quad \text{أي :}$$

نتيجة :  $(P_0)$  و  $(P_1)$  يتقاطعان في مستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطى التالي :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{7}{4}t + \frac{5}{4} \\ z = t \end{cases}$$

منه : (D) يشمل النقطة  $A(0; 5/4; 0)$  و  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 7/4 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه له .

$$3 - \text{ لتكن } M(x; y; z) \text{ نقطة من المستقيم (D) إذن } \begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{7}{4}t + \frac{5}{4} \\ z = t \end{cases} \text{ يوجد } t \in \mathbb{R} \text{ حيث}$$

منه : من أجل كل عدد حقيقي  $m$  فإن :

$$\begin{aligned} (3-m)x + 4y - (1+2m)z - 5 &= (3-m)(-2t) + 4\left(\frac{7}{4}t + \frac{5}{4}\right) - (1+2m)t - 5 \\ &= -6t + 2mt + 7t + 5 - t - 2mt - 5 \\ &= 7t - 7t + 2mt - 2mt + 5 - 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن :  $M \in (P_m)$

نتيجة : كل نقطة من (D) هي نقطة من  $(P_m)$  إذن :  $(D) \subset (P_m)$

#### التمرين - 24

لتكن النقط  $A(3; -2; 2)$  ،  $B(6; 1; 5)$  ،  $C(6; -2; -1)$

1 - بين أن المثلث ABC قائم .

2 - ليكن (P) المستوي ذو المعادلة  $x + y + z - 3 = 0$

بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

3 - ليكن (Q) المستوي العمودي على (AC) و الذي يشمل A . أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

4 - عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) حيث (d) هو تقاطع المستويين (P) و (Q)

5 - لتكن D نقطة احدائياتها  $(0; 4; -1)$

a) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

b) أحسب حجم الرباعي الوجوه ABDC

#### الحل - 24

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 6-3 \\ 1+2 \\ 5-2 \end{pmatrix} \quad -1$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 6-3 \\ -2+2 \\ -1-2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3(3) + 3(0) + 3(-3) = 9 - 9 = 0$$

إذن :  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  متعامدان .

منه : ABC مثلث قائم في A .

$$2 - (P) \text{ له المعادلة } x + y + z - 3 = 0 \text{ إذن : } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع ناظمي له .}$$

$$\text{من جهة أخرى } \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه المستقيم (AB)}$$

بما أن  $\vec{u} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1}$  فإن  $\vec{AB}$  متوازيان .

منه : المستقيم (AB) عمودي على المستوي (P)

$$3 - 2 + 2 - 3 = 0 \quad ? \quad A \in (P) \quad \text{هل}$$

إذن : فعلا A تنتمي إلى (P)

نتيجة : (P) يشمل النقطة A و عمودي على المستقيم (AB)

$$3 - (Q) \text{ مستوي عمودي على } (AC) \text{ إذن : } \vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع ناظمي له}$$

منه : (Q) له المعادلة  $3x - 3z + \alpha = 0$  حيث  $\alpha$  ثابت حقيقي .

$$3(3) - 3(2) + \alpha = 0 \quad \text{إذن : } A \in (Q)$$

$$\alpha = -3 \quad \text{أي :}$$

منه : معادلة المستوي (Q) هي :  $3x - 3z - 3 = 0$

$$x - z - 1 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \dots (1) \\ x - z - 1 = 0 \dots (2) \end{cases} \quad -4$$

بجمع (1) و (2) :  $2x + y - 4 = 0$  أي  $y = 4 - 2x$

من المعادلة (2) :  $z = x - 1$

نتيجة : المستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (Q) له التمثيل الوسيط التالي :

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \\ z = t - 1 \end{cases}$$

$$\vec{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ منه } \vec{AD} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4+2 \\ -1-2 \end{pmatrix} \quad -5$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 3(-3) + 3(6) + 3(-3) = 0 \quad (a)$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AC} = 3(-3) + 0(6) - 3(-3) = 0$$

نتيجة :  $\vec{AD} \perp \vec{AB}$  و  $\vec{AD} \perp \vec{AC}$

إذن :  $\vec{AD}$  شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

أي : المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

(b) بما أن (AD) عمودي على المستوي (ABC) فإن [AD] هو ارتفاع رباعي الوجوه ABDC

منه : حجم الرباعي ABCD هو :  $V = \frac{1}{3} AD \times S$  حيث S هي مساحة القاعدة الممثلة بالمثلث ABC

منه  $S = \frac{1}{2} AB \times AC$  لأن ABC مثلث قائم في A

$$V = \frac{1}{3} AD \times \frac{1}{2} AB \times AC \quad \text{نتيجة :}$$

$$V = \frac{1}{6} AB \times AC \times AD \quad \text{أي}$$

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{9+9+9} \times \sqrt{9+9} \times \sqrt{9+36+9} \quad \text{أي :}$$

$$V = \frac{1}{6} \times \sqrt{27} \times \sqrt{18} \times \sqrt{54} \quad \text{أي}$$

$$V = \frac{1}{6} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} \quad \text{أي}$$

$$v = 27 \quad \text{(مقتر بوحدة الحجم)}$$

التمرين 25

لتكن النقط  $D(0; 0; -3)$  ;  $C(3; -3; -1)$  ;  $B(2; 2; 2)$  ;  $A(4; 0; -3)$

1 - عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) المحوري للقطعة [AB]

2- نأبل أن المسأوبن المأورببن للأنطأبن [BD] و [DC] مأرفان بالمأالأن 2x - 10y - 6z - 7 = 0 و 3x - 3y + 2z - 5 = 0 على الأرب

ببن أن أنأاط هأه المسأوبن الأأه هو أنطه E بألب أأأأأها

3- ببن أن الأنأ A ، B ، C ، D أنع على أسأأ أرة مأرأها E و بألب أنعبن أنصف أنأها .

الأل - 25

1- لأكن w أنصف [AB] أنن :  $w \left( \frac{4+2}{2} ; \frac{0+2}{2} ; \frac{-3+2}{2} \right)$

أى w(3 ; 1 ; -1/2)

من أة أأرى :  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  أنن  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2-4 \\ 2-0 \\ 2+3 \end{pmatrix}$

منه المسأوب (P) بأمأ الأنطه w و الشأاع  $\vec{AB}$  أنأمى له أنن :

(P) له المأال 2x + 2y + 5z + α = 0 أأأ أنأ أأأى

- 2(3) + 2(1) + 5(-1/2) + α = 0 أنن : w ∈ (P)

منه :  $\alpha = \frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2}$

أنأه : (P) له المأال 2x + 2y + 5z +  $\frac{13}{2}$  = 0

أى : 4x - 4y - 10z - 13 = 0

2- إذا وأأ أنطه E مأأأة ببب المسأوبن الأأه فإن أأأأأها (x ; y ; z) هى أأ للأأه :

$$\begin{cases} 4x - 4y - 10z - 13 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 2x - 10y - 6z - 7 = 0 \dots\dots\dots (2) \\ 3x - 3y + 2z - 5 = 0 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

نأأ عن x و y بأأاله z فى المأالأن (1) و (2) كأ بى :

$$\det = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = -40 + 8 = -32$$

$$x = \frac{-1}{32} \begin{vmatrix} -4 & -10z-13 \\ -10 & -6z-7 \end{vmatrix} = \frac{-1}{32} (24z + 28 - 100z - 130) = \frac{-1}{32} (-76z - 102)$$

$$y = \frac{-1}{32} \begin{vmatrix} -10z-13 & 4 \\ -6z-7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{32} (-20z - 26 + 24z + 28) = \frac{-1}{32} (4z + 2)$$

$$\begin{cases} x = \frac{19}{8}z + \frac{51}{16} \\ y = -\frac{1}{8}z - \frac{1}{16} \end{cases} \text{ أى}$$

$$3\left(\frac{19}{8}z\right) + 3\left(\frac{51}{16}\right) - 3\left(-\frac{1}{8}z\right) - 3\left(-\frac{1}{16}\right) + 2z - 5 = 0 \quad \text{بأأوأض فى المأال 3) :}$$

$$\left(\frac{57}{8} + \frac{3}{8} + 2\right)z + \frac{153}{16} + \frac{3}{16} - 5 = 0 \quad \text{أى :}$$

$$\frac{57+3+16}{8}z = \frac{80-3-153}{16} \quad \text{أى :}$$

$$z = \frac{-76}{16} \times \frac{8}{76} \quad \text{أى :}$$

$$z = -1/2 \quad \text{أى :}$$

بأأوأض فى أأأأى x و y أنأل على :

$$\begin{cases} x = \frac{19}{8}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{51}{16} = \frac{32}{16} = 2 \\ y = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = 0 \end{cases}$$

نتيجة : المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة  $E(2; 0; -1/2)$

$$\vec{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{AE} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 0-0 \\ -\frac{1}{2}+3 \end{pmatrix} = -3$$

$$\vec{BE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{BE} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 0-2 \\ -\frac{1}{2}-2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{CE} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 0+3 \\ -\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{DE} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-0 \\ -\frac{1}{2}+3 \end{pmatrix}$$

نتيجة :

$$AE = \sqrt{4 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{16+25}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$BE = \sqrt{4 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$CE = \sqrt{1+9+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4+36+1}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$DE = \sqrt{4 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$AE = BE = CE = DE = \frac{\sqrt{41}}{2} \quad \text{منه}$$

إذن : النقط  $A, B, C, D$  تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها  $E(2; 0; -1/2)$  و نصف قطرها  $\frac{\sqrt{41}}{2}$

التمرين 26

$S(1; -2; 0)$  نقطة من الفضاء و  $(P)$  المستوي ذو المعادلة :  $x + y - 3z + 4 = 0$  اختر الجواب الصحيح في كل سؤال من الأسئلة التالية :

1 - التمثيل الوسيطى للمستقيم  $(D)$  الذي يشمل  $S$  و يعامد  $(P)$  هو :

- |                                                         |                                                           |
|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| a) $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=-3 \end{cases}$  | b) $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{cases}$  |
| c) $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3t \end{cases}$ | d) $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ |

2 -  $H$  هي نقطة تقاطع  $(P)$  و  $(D)$  . هل إحداثيات  $H$  هي :

- |                       |                           |
|-----------------------|---------------------------|
| a) $(-4; 0; 0)$       | b) $(6/5; -9/5; -3/5)$    |
| c) $(7/9; -2/3; 1/3)$ | d) $(8/11; -25/11; 9/11)$ |

3 - بعد النقطة  $S$  عن المستوي  $(P)$  هو :

- |                          |                          |                          |                   |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------|
| a) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ | b) $\frac{3}{\sqrt{11}}$ | c) $\frac{9}{\sqrt{11}}$ | d) $\frac{9}{11}$ |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------|

4 - ليكن  $(s)$  سطح الكرة التي مركزها  $S$  و نصف قطرها 3

هل تقاطع السطح  $(s)$  مع المستوي  $(P)$  هو :

a) النقطة  $A(1; -5; 0)$

(b) الدائرة ذات المركز H و نصف القطر  $3\sqrt{\frac{10}{11}}$ 

(c) الدائرة ذات المركز S و نصف القطر 2

(d) الدائرة ذات المركز H و نصف القطر  $\frac{3\sqrt{10}}{11}$ 

الحل - 26

1 -  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  هو شعاع ناظمي للمستوي (P) إذن : هو شعاع توجيه المستقيم (D)منه : (D) له التمثيل الوسيطى التالي :  
حيث  $k \in \mathbb{R}$   $\begin{cases} x-1=k \\ y+2=k \\ z-0=-3k \end{cases}$ أي :  $\begin{cases} x=1+k \\ y=-2+k \\ z=-3k \end{cases}$ نضع  $k=t+1$  منه :  
حيث  $t \in \mathbb{R}$   $\begin{cases} k+1=t+2 \\ k-2=t-1 \\ -3k=-3-3t \end{cases}$ نتيجة :  $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t-1 \\ z=-3-3t \end{cases}$ إذن : الجواب الصحيح هو  
d)  $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ 

2 - لتكن H نقطة تقاطع (D) و (P)

إذن :  $2+t-1+t-3(-3-3t)+4=0$ أي :  $1+2t+9+9t+4=0$ أي :  $11t=-14$ أي :  $t=-14/11$ 

منه :

$$\begin{cases} x=2-\frac{14}{11}=\frac{8}{11} \\ y=-1-\frac{14}{11}=\frac{-25}{11} \\ z=-3+\frac{42}{11}=\frac{9}{11} \end{cases}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو d)  $(8/11; -25/11; 9/11)$ 3 - لتكن  $\ell$  مسافة النقطة S عن المستوي (P)

$$\ell = \frac{|1-2-3(0)+4|}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b)  $\frac{3}{\sqrt{11}}$ 

4 - بتعويض إحداثيات A في معادلة المستوي (P) نحصل على :

$$A \in (P) : \text{إذن } 1-5+4=-4+4=0$$

من جهة أخرى :  $\vec{AS} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -2+5 \\ 0-0 \end{pmatrix}$  أي  $\vec{AS} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  منه :  $AS = \sqrt{0+9+0}=3$  إذن :  $A \in (s)$ نتيجة :  $A \in (s) \cap (P)$  منه الجواب الصحيح هو (a) النقطة  $A(1; -5; 0)$

## الفهرس

الصفحة	المحور
1	المحور 1 : الاستدلال بالتراجع
2	حلول تمارين الكتاب المدرسي
15	المحور 2 : النهايات و الإستمرارية
22	حلول تمارين الكتاب المدرسي
73	المحور 3 : القسمة في Z
78	حلول تمارين الكتاب المدرسي
101	حلول لتمرين نماذج للبكالوريا
119	المحور 4 : الجداء السلمي
124	حلول تمارين الكتاب المدرسي
157	المحور 5 : المستقيمات و المستويات في الفضاء
163	حلول تمارين الكتاب المدرسي
185	حلول لتمرين نماذج للبكالوريا

سلسلة هباج

TEL : 0773 26 52 81